# Kombinatorika

A kombinatorika keretén belül tanuljuk: *ismétlés nélküli permutációk, ismétléses permutációk, ismétlés nélküli variációk, ismétléses variációk, ismétlés nélküli kombinációk, ismétléses kombinációk*.

## 1. Ismétlés nélküli permutáció

**Hányféleképpen lehet sorba rendezni *n* különböző elemet úgy, hogy a sorrend számít?**
**(Ezt *n* elem ismétlés nélküli permutációjának nevezzük.)**

**Például hány féleképpen lehet sorba rendezni a TEA szó betűit?**

**TEA, TAE, AET, EAT, ATE, ETA** $\Rightarrow$ 6 db

| hely | 1. hely | 2. hely | 3. hely |
|---|---|---|---|
| lehetőség | 3 | 2 | 1 |

**Az esetek számát a lehetőségek szorzata adja:** $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ **(3 faktoriális)**

**Az első n pozitív egész szám szorzatát faktoriálisként rövidítjük.**
$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

| hely | 1. hely | 2. hely | 3. hely | … | n. hely |
|---|---|---|---|---|---|
| lehetőség | n | n –1 | n – 2 | | 1 |

***n* különböző elemet *n* faktoriális-féleképpen lehet sorba rendezni:** $P_n = n!$

### Feladatok

**1. Öt tanuló érkezik egyszerre a büféhez. Hányféleképpen állhatnak sorba?**

| hely | 1. hely | 2. hely | 3. hely | 4. hely | 5. hely |
|---|---|---|---|---|---|
| lehetőség | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

**A tanulók 5·4·3·2·1 =120 féleképpen állhatnak sorba. Tehát** $P_5 = 5! = 120$

**2. Az országos nagyotmondó bajnokság döntőjébe hat csapat jutott be.**
**a.) Hányféle sorrend alakulhat ki?**
**b.) Hány olyan sorrend alakulhat ki, ahol a Mániákus Igazmondóké az első hely?**

**a.) 6! = 720-féle sorrend lehetséges.**

**b.) Az első helyezettet egyféleképpen választhatjuk ki. A többi öt csapatot 5! féleképpen rendezhetjük sorba mögötte.**
**A sorrendek száma 1·5!**

**3.** **A 0, 1, 2, 3, …  ,9 számokat sorozatba rendezzük. Hány esetben lehet, hogy az 1, 2, 3 számok növekvő sorrendben kerülnek egymás mellé?**

**Ha sorozatba rendezzük a számokat, akkor az első helyen lehet 0 is. Ha tízjegyű számokat keresnénk, akkor az első helyen nem lehetne 0.**

**0; 123; 4; 5; 6; 7; 8; 9**
$\downarrow$
**Egy elemet képezek, 8-an vannak $\Rightarrow$ 8! sorrend lehetséges.**

**Másik megoldás:**

**Írjuk rá a számokat papírlapokra! Az 1-t, a 2-t és a hármat egy papírlapra írjuk növekedő sorrendben.  Annyi eset van, ahányféleképpen az alábbi lapokat sorba lehet rendezni.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 123 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

**8 lap van $\Rightarrow$ 8! sorrend lehetséges.**

**4.** **Az iskolában rendezett versmondó verseny döntőjébe 10 tanuló került: Béla, Cecília, Erzsébet, Ferenc, Ilona, Jolán, Kálmán, Lívia, Mária és Péter.**
**a.) Hányféleképpen alakulhat a sorrend a helyezések szempontjából?**
**b.) Hány esetben lehet fiú az első helyezett?**

**a.) 10 embert 10! féleképpen lehet sorbarendezni.**
**b.) Az első helyre négy fiúból választhatunk. A második helyre a maradék 9 emberből választhatunk, és így tovább.**

| hely | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| lehetőség | 4 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

$4\cdot 9\cdot 8\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1 = 4\cdot 9!$ **sorrend lehetséges.**

**5.** **Egy baráti kör tagjai közül 6 lány és 5 fiú együtt megy színházba. A jegyek egymás mellé szólnak.**
**a.) Hányféleképpen ülhetnek le?**
**b.) Hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha lány lány mellé, és fiú fiú mellé nem ülhet?**

**a.) 11 hely $\Rightarrow 11!$ sorrend lehetséges.**
**b.) Mivel eggyel több a lány, egyneműek akkor nem kerülhetnek egymás mellé, ha a két szélen lányok ülnek.**

| hely | $L_1$ | $F_1$ | $L_2$ | $F_2$ | $L_3$ | $F_3$ | $L_4$ | $F_4$ | $L_5$ | $F_5$ | $L_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| lehetőség | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |

**A lányokat a saját helyükre 6!, a fiúkat a saját helyükre 5! féleképpen ültethetjük le. Mivel bármelyik lány hatost bármelyik fiú ötössel párosíthatjuk a lehetőségek száma: $6!\cdot 5!$**

**6. 5 házaspár foglal helyet egy padon. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házaspárok egymás mellett akarnak ülni?**

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | N | F | N | F | N | F | N | F | N | F | N |

**Írjuk fel a házaspárok nevét papírlapokra az ábrának megfelelően! Öt kártyát 5! féleképpen rendezetünk sorba. Ha valamelyik lapon felcseréljük apucit és anyucit, akkor is a feltételeknek megfelelő sorrendet kapunk. Minden ilyen csere megduplázza a lehetőségek számát!**

**Összesen $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5! = 2^5\cdot5!$ helyfoglalás lehetséges.**

**7. 5 házaspár foglal helyet egy padon. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni, de sem két nő, sem két férfi nem ülhet egymás mellé?**

**Írjuk fel a házaspárok nevét papírlapokra az ábrának megfelelően! Öt kártyát 5! féleképpen rendezetünk sorba. Ha mindegyik lapon felcseréljük apucit és anyucit, akkor is a feltételeknek megfelelő sorrendet kapunk.**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | N | F | N | F | N | F | N | F | N |
| N | F | N | F | N | F | N | F | N | F |

**Összesen $2\cdot5! = 2\cdot5!$ helyfoglalás lehetséges.**

**8. Hány 6-tal osztható tízjegyű számot készíthetünk a 0, 1, 2, …, 9 számjegyekből, ha minden számjegyet csak egyszer írunk fel?**

**Egy szám akkor osztható hattal, ha 2-vel és 3-mal is osztható.**

$$3 \mid 1+2+\ldots+9=45$$

**A megadott számok összege osztható hárommal, azért az összes ilyen tízjegyű szám osztható hárommal. Ha páros, akkor hattal is osztható. Tehát közülük azok oszthatók hattal, amelyek párosak, azaz 0, 2, 4, 6, 8-ra végződnek.**

| hely | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. 0 van |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| lehetőség | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 |

**0-ra végződőekből 1·9! szám van.**

**Ha a végén 2 van, akkor az első helyre 8 elemből választhatunk, mert szám nem kezdődhet 0-val.**

**$\cancel{0}$, 1, $\cancel{2}$, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**

| hely | 1.<br>0 nem | 2.<br>0 is | | | | | | | | 10.<br>2 van |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| lehetőség | 8 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 |

**Ha a végén 4, 6 vagy 8 van, akkor ugyanennyi eset létezik.**

**Összesen $4\cdot 8\cdot 8!+9!$ ilyenszámot készíthetünk.**

**9. Hány olyan hatjegyű szám van, amelyik 5-tel osztható?**

**Az első helyre 9 számjegyet tehetünk, mert a 0 nem kerülhet a szám elejére. Az utolsó helyre a 0 és az 5-ös kerülhetnek. A közbülső négy hely mindegyikére a 10 számjegy bármelyike kerülhet. Ezek a választások egymástól függetlenek, tehát az összes lehetőség számát megkapjuk, ha az egyenkénti lehetőségeket összeszorozzuk:**

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 2 = 180\,000$$

**10. A 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekkel képezzük az összes hatjegyű számot (nincs számjegy ismétlés).**
**a) Hány hatjegyű számot kapunk 6!-5!=600**
**b) Hány szám kezdődik 1-el? 5!=120**
**c) Hány szám végződik 1-ben? 5!-4!=96**
**d) Hány szám kezdődik 10-el? 4!=24**
**e) Hány szám nem kezdődik 10-el? 600-24=576**

**11. 10 riporter között 3 sportriporter van. Hányféleképpen lehet a riportereket 10 helyszínre kiküldeni, ha 3 helyszínen sportrendezvény van, s mindhárom sporthelyszínre sportriportereket akarunk küldeni?**

**Megoldás: 3!×7!**

**12. Hányféle sorrendben helyezhetünk el a polcon 8 könyvet, ha egy két- illetve egy háromkötetes regény kötetei csak egymás mellett állhatnak?**

**Megoldás: 5!×2!×3!**

**13. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekkel hány olyan hatjegyű szám képezhető, amelyben az utolsó két számjegy összege 6-nál kisebb?**

**Megoldás: 4×5!×2! (az utolsó két számjegy 1 és 2, vagy 1 és 3, vagy 1 és 4, vagy 2 és 3)**

**14.** **Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekkel hány olyan hatjegyű szám képezhető amelyik:**
**a) osztható 3-mal  b) osztható 9-cel  c) páros  d) páratlan**
**e) osztható 5-tel  f) osztható 25-tel  g) 56-tal kezdődik  h) a 4-es és a 2-es egymás mellett vannak  i) a 2-es és az 5-ös alapsorrendbeli helyén áll  j) a 2-es és a hármas nincs egymás mellett**

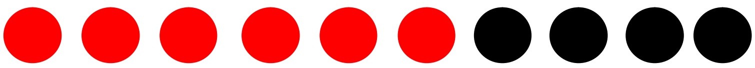
**a) 6!=720  b) 0  c) 3×5!  d) 3×5!  e) 5!= 120  f) 4!= 24**
**g) 4!= 24  h) 2×5!=240  i) 4!= 24  j) 6!- 2×5!= 480**

**15.** **A 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket pontosan egyszer felhasználva hány**
**a) tetszőleges  b) valódi 7-jegyű  c) páros  d) páratlan**
**e) tízzel osztható  f) öttel osztható  g) öttel kezdődő  h) 56-tal kezdődő**
**i) 56-ra végződő  j) a 3 a közepén, tőle jobbra és balra egyenlő összegű számjegyeket tartalmazó számot képezhetünk? (a c) – j) esetekben is valódi hátjegyű számokat kell adni!)**

**a) 7!= 5040  b) 7!- 6!= 4320 c) 6!+3×(6!- 5!)= 2520 d) 3×(6!- 5!)= 1800**
**e) 6!= 720  f) 6!+(6!– 5!)= 1320  g) 6!= 720  h) 5!= 120**
**i) 5!- 4!= 96  j) 3!×3!+3!(3!-2!)=60**

## 2. Ismétléses permutáció

**1.** **Hányféleképpen lehet sorba rendezni 6 piros és 4 fekete golyót?**



**Ha mind a 10 golyó különböző színű lenne, akkor 10! - féle módon állíthatnánk sorba őket. Az azonos színűek egymás közötti sorrendje mindegy, ezért az esetek száma annyiad részre csökken, ahányféleképpen az egyszínű golyókat a saját helyükön felcserélhetjük.**

$$P_{10}^{6,4} = \frac{10!}{6!\cdot 4!}$$

**2.** **Hányféleképpen lehet sorba rakni egy fehér, két zöld és három kék golyót?**

**Ha mind a 6 golyó különböző színű lenne, akkor 6·5·4·3·2·1=720 lehetőségünk volna. A két zöld golyót 2·1 = 2, a három kéket pedig 3·2·1=6-féleképpen lehet sorba rakni. Mivel az azonos színűeket egyformának tekintjük, az egymás közötti sorrendjeiket nem különböztetjük meg, a 720-t el kell osztani annyival amennyiszer az egyszínű golyókat a saját helyükön sorba rendezhetjük, azaz összesen 720:(2·6) = 60 lehetőség van.**

**Röviden:** $P_{6}^{3,2,1} = \frac{6!}{3!\cdot 2!}$

**3.** **Hányféleképpen lehet sorba rendezni az ALMACSUTKA szó betűit?**

**10 betűt 10! féleképpen lehetne sorba rendezni, ha nem lennének köztük egyformák. A betűből 3 db van.**

**Ha a 3 A betűt felcseréljük a saját helyén, akkor ugyanazt a betűtízest kapjuk:**
**$A_1$LM $A_2$CSUTK $A_3$ = $A_3$LM $A_2$CSUTK $A_1$**

**Ezt bármelyik betűtízesnél eljátszhatjuk ugyanazt a „szót" kapjuk. Emiatt az esetek száma annyiad részére csökken, ahányféleképpen fel lehet cserélni a saját helyükön az egyforma betűket.**

$$P_{10}^{3} = \frac{10!}{3!}$$

**4. Hányféleképpen lehet sorba rendezni a MATEMATIKA szó betűit?**

**10 betűt 10! féleképpen lehetne sorba rendezni, ha nem lennének köztük egyformák. A betűből 3 db van, M és T betűből 2 db van.**

**$M_1$ $A_1T_1$ E $M_2$ $A_2T_2$I K $A_3$**

**Ha a 3 A betűt felcseréljük a saját helyén, akkor ugyanazt a betűtízest kapjuk:**
**$M_1$ $A_2T_1$ E $M_2$ $A_1T_2$I K $A_3$**

**Bármelyik betűtízesben a három A betűt 3!–szor cserélhetjük fel a saját helyükön úgy, hogy ugyanazt a betűtízest kapjuk.**

**Ezért az esetek számát (10! ) el kell osztani, ha a 3!-sal.**

**Bármelyik betűtízesben a 2 T betűt 2! –szor cserélhetjük fel a saját helyükön, úgy hogy ugyanazt a betűtízest kapjuk. Emiatt**
**Ezért az esetek számát (10! ) el kell osztani, ha a 2!-sal.**

**Bármelyik betűtízesben a 2 M betűt 2! –szor cserélhetjük fel a saját helyükön, úgy hogy ugyanazt a betűtízest kapjuk. Emiatt**
**Ezért az esetek számát (10! ) el kell osztani, ha a 2!-sal.**

**Tehát az összes esetek számát megkapjuk, ha a 10!-t elosztjuk 3!·2!·2!-sal**

$$P_{10}^{3,2,2} = \frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}$$

**5. Hányféleképpen lehet sorba rendezni a taníthatatlan szó betűit?**

**taníthatatlan ⇒ 13 betű. 4db t, 4 db a és 2db n betű van köztük.**

**A lehetőségek száma:** $P_{13}^{4,4,2,1,1,1} = P_{13}^{4,4,2} = \frac{13!}{4!\cdot 4!\cdot 2!}$

**6. Hány nyolcjegyű páratlan szám készíthető 4 darab 0-ból és 4 darab 1-esből?**

| Hely | 1. csak az 1 | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. csak 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A lehetőségek száma | 1 | | | | | | | 1 |

**Az első helyen nem lehet 0 tehát csak egyessel kezdődhet a szám. Az utolsó helyen csak 1 lehet, mert páratlan számot akarunk.**
**Annyi számot készíthetünk, amennyiféleképpen a maradék 6 számjegyet sorba rendezhetjük.** $0,0,0,0,1,1,\cancel{1},\cancel{1}$

$$P_6^{4,2}=\frac{6!}{4!\cdot 2!}$$

**7. Határozzuk meg az 1, 2, 2, 3, 3, 3 elemek permutációinak számát. (Hányféleképpen lehet sorba rendezni ezeket, a számokat?) Ezek között hány olyan van, amelyben az első helyen a 2 számjegy áll?**

$P_6^{2,3}=\frac{6!}{2!\cdot 3!}$ **– féleképpen lehet sorba rendezni a számokat.**
**Ha az első helyen kettes van, akkor annyi ilyen szám létezik, ahányszor sorba rendezhetjük a 2 mögött a maradék öt számjegyet.** **1, 2, $\cancel{2}$, 3, 3, 3**

**Az adott számokból** $\frac{5!}{3!}=20$ **olyan számot készíthetünk, amelyikben az első helyen 2 áll.**

**8. Egy szabályos dobókockát 14-szer feldobunk.**
**a) Hány olyan dobássorozat létezik, amelyben 3-szor 6-ost, 2-szer 5-öst, 4-szer 2-est, a többi esetben 1-est dobunk?**
**b) Hány olyan eset van, amikor a két 5-ös az első és az utolsó dobás?**

a) $P_{14}^{3,2,4,5}=\frac{14!}{3!2!4!5!}=2522520$  b) $P_{12}^{3,4,5}=\frac{12!}{3!4!5!}=27720$

**9. Egy pénzérmét 12-szer feldobunk, s 10-szer fej, 2-szer írás adódik**
**a) Hányféleképpen lehetséges ez?**
**b) Hányféleképpen valósulhat ez meg akkor, ha az első és az utolsó dobás fej?**
**c) Hány olyan dobássorozat létezik, ahol a két középső dobás fej?**
**d) Hány olyan eset lehetséges, mikor a két írás egymás után áll?**

a) $P_{12}^{10,2}=\frac{12!}{10!2!}=66$  b) $P_{10}^{8,2}=\frac{10!}{8!2!}=45$  c) $P_{10}^{8,2}=\frac{10!}{8!2!}=45$  d) $P_{11}^{10}=\frac{11!}{10!}=11$

**10. Hány nyolcjegyű szám képezhető a 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1 számjegyekből?**

$$P_8^{4,4}-P_7^{3,4}=35$$

**11. A 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2 számjegyekből hány**
**a) tetszőleges  b) valódi  c) valódi páratlan  d) valódi páros**
**hétjegyű szám képezhető?**

a) $P_7^{2,3,2} = 210$ b) $P_7^{2,3,2} - P_6^{3,2} = 150$ c) $P_6^{2,2,2} - P_5^{2,2} = 60$

d) $(P_6^{2,3} - P_5^{3}) + (P_6^{2,3} - P_5^{2,3}) = 90$

**12. 6 piros, 3 fehér, 2 kék golyót hányféleképpen lehet egymás mellé helyezni, hogy a hat piros golyó ne kerüljön egymás mellé?**

$P_{11}^{6,3,2} - P_{6}^{3,2,1} = 4560$

**13. Hányfélképpen olvasható ki a táblázatból a KOLLOKVIUM szó, ha a táblázat bal felső betűjétől indulunk ki, és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?**

**1. megoldás:** $P_9^{4,5} = \dfrac{9!}{4!5!} = 126$

**„lllljjjjj"**

**2. megoldás, rekurzív számlálással:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| K | 1 O | 2 L | 3 L | 4 O | 5 K |
| 1 O | L | L | L | K | V |
| 2 L | L | O | K | V | I |
| 3 L | O | K | V | I | U |
| 4 O | K | V | I | U | M |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| K | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 |
| 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 |

**14. Hányfélképpen olvasható ki a táblázatból a KOLLOKVIUM szó, ha a táblázat bal felső betűjétől indulunk ki, és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük, de minden lépésben irányt változtatunk?**

**Az egyetlen kiolvasási lehetőség a K-tól indulva: jl-jl-jl-jl-j**

**15. Hányféleképpen juthatunk el a sakktábla bal felső sarkából a jobb alsó sarkába, ha csak jobbra, illetve felülről lefele haladhatunk?**

## 3. Ismétlés nélküli variáció

**Hányféleképpen lehet kiválasztani *n* különböző elemből *k* különböző elemet úgy, hogy a sorrend számít, és minden elemet csak egyszer választhatunk?**

**0. Egy 14 fős csoportban hányféleképpen lehet 5 különböző könyvet kiosztani, ha mindenki 1 könyvet kaphat?**

**Az első könyvet 14 tanulónak adhatjuk. A második könyvet a maradék 13 tanulónak adhatjuk. És így tovább…**

| hely | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
|---|---|---|---|---|---|
| lehetőség | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 |

**Összesen 14·13·12·11·10 – féleképpen oszthatjuk ki a könyveket.**

$$14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = \frac{14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot \cancel{9 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{14!}{9!} = \frac{14!}{(14-5)!}$$

**Általában**

***n* különböző elemből *k* különböző elemet $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ - féleképpen lehet kiválasztani úgy, hogy a sorrend számít.**

**1. Úszóversenyen 8 versenyző indul, az első három helyezettet éremmel fogják díjazni. Ha mindenki egyformán esélyes, akkor hányféle módon lehetséges az első három érem kiosztása?**

**Ennél a feladatnál 8 elem harmadosztályú variációját kell meghatározni. Az első helyezett a 8 versenyző bármelyike lehet, ez nyolc lehetőség. A második a többi 7 versenyző közül kerül ki, a harmadik helyre a kimaradt 6 ember közül bármelyik ember kerülhet, így az összes lehetőségek száma $V_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.**

**2. Hány olyan négyjegyű szám van, amely különböző számjegyekből áll?**

**Ha úgy választunk ki 4 számot a 10 elemből álló halmazból, hogy a sorrend is számit, akkor a 10 elem negyedosztályú variációját kapjuk:**

$V_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

**Ezután kiszámítjuk azoknak a számát, melyek nullával kezdődnek. Mivel az első helyen nem állhat a nulla, e számokat úgy kapjuk meg, hogy a maradék három helyre 9 számjegy közül választunk, a sorrendet is figyelembe véve. Ki kell számítanunk 9 elem harmadosztályú variációinak számát:**

$V_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$

**Ha ezt a számot az előbbiből kivonjuk, akkor megkapjuk azoknak a számoknak a számát, melyek nem nullával kezdődnek.**

$$V_{10}^4 - V_9^3 = = 5040 - 504 = 4536$$

**Másik megoldás:**

| hely | 1.<br>0 nem | 2.<br>az első helyen álló számjegy nem, de a 0 igen | 3. | 4. |
|---|---|---|---|---|
| A lehetőségek száma | 9 | 9 | 8 | 7 |

**9·9·8·7 = 4536 olyan négyjegyű szám van, amely különböző számjegyekből áll.**

**3. Hány 3 jegyű szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek egyszeri felhasználásával?**

**Az első helyre bármelyik számot választhatom az 5 közül, a második helyre a maradék 4-ből, a harmadikra a maradék 3-ból választhatok.**

| hely | 1. | 2. | 3. |
|---|---|---|---|
| A lehetőségek száma | 6 | 5 | 4 |

Összesen $V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ szám készíthető.

Másképp: $V_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

**4.** Egy 5 házból álló házsort szeretnénk kifesteni. Hányféle kifestés létezik, ha 7-féle festékünk van, és minden háznak különböző színűnek kell lenni? (Egy házhoz csak egyféle festéket használunk, a festékeket nem lehet keverni.)

Az első házhoz 7-féle festékből választhatunk, a másodikhoz a maradék 6-ből, a harmadikhoz a maradék 5-ből stb.,

| hely | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
|---|---|---|---|---|---|
| A lehetőségek száma | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 |

Összesen $V_7^5 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ lehetőség van.

Másképp: $V_7^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

**5.** Hány <u>4 jegyű</u> szám készíthető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyek egyszeri felhasználásával?

Az első helyre 4 számjegyből választhatok (0 nem állhat az első helyen), a második helyre a maradék 4-ből bármelyik kerülhet (itt már lehet 0), a harmadikra a maradék 3-ból bármelyik stb.

| hely | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
|---|---|---|---|---|---|
| A lehetőségek száma | 4 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Azaz összesen $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ szám készíthető.

Másképpen: $V_5^4 - V_4^3 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 - 4 \times 3 \times 2 = 4 \times 3 \times 2 \times (5-1) = 96$

**6.** Egy bank egyik csoportja 8 különböző munkakört lát el. A fős csoport dolgozóit 15 jelentkező közül kell kiválasztani. Hányféleképpen állhat össze a csoport, ha 2 munkakört a 15 közül csak 4-en, a többit bármelyik jelentkező képes ellátni? (Egy személy csak egy munkakört lát el).

Megoldás: $V_4^2 \cdot V_{15-2}^6 = 14826240$

**7.** Egy hallgatói csoportban 10 lány és ismeretlen számú fiú van. Három egymás mellé szóló színházjegyet 840-féleképp oszthatunk ki úgy, hogy azonos neműek nem ülnek egymás mellett. Hány fiú van a csoportban?

$V_{10}^2 \cdot V_n^1 + V_{10}^1 \cdot V_n^2 = 840$ ahonnan n= 6

**8.** Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyek legfeljebb egyszeri felhasználásával számokat képezünk. Hány valódi

a) egyjegyű b) kétjegyű c) kétjegyű páros d) kétjegyű páratlan
e) háromjegyű f) háromjegyű hárommal osztható
g) háromjegyű hattal osztható h) négyjegyű 25-tel osztható
szám képezhető?
Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy nyolcadik számjegyként a 0-t is szerepeltessük!

Megoldások: a) $V_7^1=7$ b) $V_7^2=42$ c) $V_6^1\cdot V_3^1=18$ d) $V_6^1\cdot V_4^1=24$
e) $V_7^3=210$ f) 78 g) 34 h) $2\cdot V_5^2=40$
(Az f) és a g) feladatokhoz a három számjegy: 123, 126, 135, 147, 156, 234, 246, 237, 345, 456, 267, 567, 357).
A 8 számjegy esetén a válaszok: a) $V_8^1=8$ b) $V_8^2-V_7^1=49$
c) $V_7^1-V_3^1=25$ d) $V_6^1\cdot V_4^1=24$ e) $V_7^3-V_6^2=180$ f) 106 g) 54
h) $2(V_6^2-V_5^1)+V_6^2=80$

**9.** Egy dobozból, amelyben 8 piros és bizonyos számú fehér, számozott golyó van, egymás után, visszatevés nélkül 1280- féleképpen húzható ki 3 golyó úgy, hogy két piros, vagy két fehér golyó ne következzen egymás után.
Hány fehér golyó van a dobozban?

Megoldás: $V_8^2\cdot V_x^1+V_x^2\cdot V_8^1=1280$ vagy $56x+8x(x-1)=1280$ ahonnan x= 10.

## 4. Ismétléses variáció

Hányféleképpen lehet kiválasztani *n* különböző elemből *k* különböző elemet úgy, hogy mindegyik elemet akárhányszor választhatjuk, de a sorrend számít?

| hely | 1. bárkinek | 2. bárkinek | … | k. bárkinek |
|---|---|---|---|---|
| lehetőség | n | n | | n |

*n* különböző elemből $n^k$ – féleképpen választhatunk ki *k* elemet úgy, hogy egy elemet többször is választhatunk.

$$\boxed{V_n^{k,i}=n^k}$$

**1.** *Egy 10 fős társaságban 4 könyvet osztunk szét. Hányféleképpen tehetjük meg, ha minden könyv különböző, és mindenki több könyvet is kaphat?*

Mind a 4 könyvet kaphatja a 10 közül bármelyik ember, azaz összesen 10·10·10·10=10000 lehetőség van.

**2.** Egy 5 házból álló házsort szeretnénk kifesteni. Hányféle kifestés létezik, ha 4-féle festékünk van, és
a) a szomszédos házak nem lehetnek egyforma színűek?
b) a szomszédos házak lehetnek egyforma színűek is

(Egy házhoz csak egyféle festéket használunk, a festékeket nem lehet keverni.)

a) Az első házhoz 4-féle festékből választhatunk, a másodikhoz a maradék 3-ból, a harmadikhoz szintén 3-ból (a második ház színét nem választhatjuk, de az elsőét igen), az összes továbbihoz is 3 színből, azaz összesen 4·3·3·3·3 = 324 lehetőség van.

b) 4×4×4×4×4=1024

3. Hány különböző rendszám adható ki, amely három betűből és azt követő három számból áll (az ábécé 26 betűjét használjuk)?

| hely | 1. betű | 2. betű | 3. betű | 1. szám | 2. szám | 3. szám |
|---|---|---|---|---|---|---|
| lehetőség | 26 | 26 | 26 | 10 | 10 | 10 |

Az egyes betűhelyeken egymástól függetlenül 26-féle betű, míg a számhelyeken szintén egymástól és a betűktől is függetlenül 10-féle szám állhat. A megfelelő rendszámok száma ezért $26^3 \cdot 10^3$.

Másféleképpen: $V_{26}^{3,i} \cdot V_{10}^{3,i} = 26^3 \cdot 10^3$

4. A tízes számrendszerben hány db kétjegyű szám van?

Bármely n alapú számrendszerben az n darab számjegy k-ad osztály ismétléses variációjaként kapjuk meg az összes k jegyű számokat. Ekkor a darabszámban a 0-val kezdődő számok is benne vannak. Például a 10-es számrendszerben a másodosztályú ismétléses variációval képezett kétjegyű számok darabszáma: $V_{10}^{2,i} = 10^2 = 100$.
Ezek a számok: 00, 01, 02, 03, ..., 09, 10, ..., 99.
Kivonjuk az egyjegyűek (amelyek 0-val kezdődnek) számát, akkor megkapjuk a kétjegyű számok darabszámát.
100 – 10 = 90

5. A tízes számrendszerben hány db háromjegyű szám van?

$$V_{10}^{3,i} - V_{10}^{2,i} = 10^3 - 10^2 = 900$$

6. Hányféle különböző eredmény születhet, ha egy

a) pénzérmét b) egy dobókockát ötször feldobunk?

a) $V_6^{2,i} = 6^2 = 36$

b) Egy dobás alkalmával hatféle pontértéket kaphatunk. E hat elemből ötös csoportokat kell képeznünk, amelyekben egyes elemek többször is előfordulhatnak, és a sorrend is számít. A lehetséges csoportok számát 6 elem 5-ödosztályú ismétléses variációinak száma adja:

$$V_6^{5,i} = 6^5 = 7776$$

**7. Rulettjátéknál egy játszmában a golyó 37 számozott hely valamelyikén áll meg. Hányféle eredménye lehet három játszmának, ha azok sorrendjét is figyelembe vesszük?**

**Ez esetben azok a számozott helyek jelentik az elemeket, amelyek a pörgetéseknél kijönnek. Minden pörgetésnél 37 szám jöhet ki. A három pörgetés egy három számból álló sorozatot ad. Az összes lehetséges sorozatot, ha a sorrendet is megkülönböztetjük, 37 elem harmadosztályú ismétléses variációi adják. Ezeknek száma:**

$$V_{37}^{3,i} = 37^3 = 50\,653$$

**Tehát a 3 rulett játszmában 50 653 változat jöhet létre, ha a sorrendet megkülönböztetjük.**

**8. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával hány olyan háromjegyű szám készíthető, amelyben az 5 –ös előfordul?**

**Az 5 –ös számjegyet tartalmazó számok száma =**
**=Összes háromjegyű szám - az 5 –öst nem tartalmazó számok száma.**

**Az összes háromjegyű szám (a fenti számjegyekből):** $V_5^{3,i} = 5^3 = 125$

**Az 5 –öst nem tartalmazó háromjegyű számok száma:** $V_4^{3,i} = 4^3 = 64$

**Tehát a végeredmény:** $V_5^{3,i} - V_4^{3,i} = 125 - 64 = 61.$

**9. Egy matematika dolgozatban 10 kérdés szerepel. Minden kérdés feleletválasztásos. Az egyes válaszokat A, B, C, D, E betűvel jelöltük**

**Hányféle különböző választássorozat lehetséges?**

**Megoldás: Minden válaszra az 5 betű valamelyikét jelöljük be, tehát** $V_5^{10,i} = 5^{10}$ **lehetőség van.**

**10. Egy közösség kiválaszt 3 különböző tisztségre egy-egy személyt. Ha egy személy több tisztséget is betölthet, akkor 408—cal több választási lehetőség adódik, mintha minden posztra más-más személyt állítanának. Mekkora létszámú a közösség?**

**Megoldás:** $V_n^{3,i} - V_n^3 = 408$ **ahonnan n= 12.**

**11. Hány, legfeljebb 6-elemű jel állítható össze a Morse-ABC-ben? (A jelek pontokból és vonalakból állnak).**

**Megoldás:** $\sum_{k=1}^{6} V_2^{k,i} = 126$

**12. Egy gyár 8-féle terméket állít elő. n számú dolgozót a gyár egy-egy termékével jutalmaznak meg. (Akár az is előfordulhat, hogy minden dolgozó egyféle terméket kap, s ez a 8 termék bármelyike lehet.) Hány dolgozót jutalmaznak akkor, ha ez a szám 4096?**

**Megoldás:** $V_8^{n,i} = 8^n = 4096$ **ahonnan n= 4**

**13. Hányféle eredmény születhet akkor, ha egy csomag magyar kártyából 4 lapot egymás után kihúzunk, és a húzásnál**

**a) a kihúzott lapokat mind megkülönböztetjük egymástól**

**b) a kihúzott lapokat csak a szín szerint különböztetjük meg**

**c) a kihúzott lapokat csak az értéke szerint különböztetjük meg?**

**Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy az egyenkénti húzás után mindig visszatesszük, illetve úgy is, hogy nem tesszük vissza a lapot (leosztjuk)!**

**Megoldás: a) visszatevés nélkül: $V_{32}^{4} = 863040$, visszatevéssel:**

**$V_{32}^{4,i} = 32^4 = 1048576$**

**b) minden esetben: $V_4^{4,i} = 4^4 = 256$**

**c) minden esetben: $V_8^{4,i} = 8^4 = 4096$**

**14. Turistajelzéshez a sárga, a piros, a zöld és a kék színt használják fel úgy, hogy 3 sávot festenek fel egymás alatt, és két érintkező sáv nem lehet azonos színű. Hány különböző turistajelzés alakítható ki?**

**Megoldás: $V_4^{3,i} - \left(V_4^1 + 2V_4^2\right) = 36$ ( $V_4^1$ egyszínű, $V_4^2$ tiltott kétszínű jelzés lehetséges; utóbbiak sávjai kétféleképp helyezkednek el.)**

**15. A fehér, sárga, piros, zöld, kék és a fekete színekből hányféle trikolór, illetve kétsávos zászló készíthető, ha két azonos szín nem állhat egymás mellett, és a zászló osztása vízszintes is és függőlegesen is elhelyezkedhet, de csak az egyik fajta osztás a megengedett?**

**Megoldás: $2\left(V_6^{3,i} - V_6^1 - 2V_6^2\right) = 300$ trikolór, illetve $2V_6^2 = 60$ kétsávos.**

**16. Hányféleképpen olvasható ki az alábbi táblázatból a TANULÓ szó, ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk ki, és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?**

**1. Megoldás: $V_2^{5,i} = 2^5 = 32$, mert nézzük meg, hány lépésben juthatunk el T-től az Ó–ig . Ez 5 lépés. Minden lépésben 2-féle választási lehetőségünk van, így $2^5$-féleképpen olvashatjuk ki a szót.**

**2. Megoldás: rekurzív számlálással: 1+5+10+10+5+1=32**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| T | A | N | U | L | Ó |
| A | N | U | L | Ó | |
| N | U | L | Ó | | |
| U | L | Ó | | | |
| L | Ó | | | | |
| Ó | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| T | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| 1 | 3 | 6 | 10 | | |
| 1 | 4 | 10 | | | |
| 1 | 5 | | | | |
| 1 | | | | | |

**17.** **Az alábbi módon helyeztük el a FŐISKOLA fényreklámját:**

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | F | | | | | | | |
| | | | | | | Ő | | Ő | | | | | | |
| | | | | | I | | I | | I | | | | | |
| | | | | S | | S | | S | | S | | | | |
| | | | K | | K | | K | | K | | K | | | |
| | | O | | O | | O | | O | | O | | O | | |
| | L | | L | | L | | L | | L | | L | | L | |
| A | | A | | A | | A | | A | | A | | A | | A |

**a) hányféleképpen olvasható ki a FŐISKOLA szó, ha rézsútosan balra vagy rézsútosan jobbra haladhatunk?**
**b) Hányféleképpen villanhat fel a FŐISKOLA 8 betűje, ha minden betű kétféle színben villanhat fel, és a legfelső betűből kiindulva mindig a kivilágosodó betű alatti sorban, a hozzá legközelebb levő két betű közül az egyik villan fel?**

a) 7 lépést kell megtennünk, tehát $V_2^{7,i} = 2^7 = 128$

b) Mivel 8 betű van és ezekre 2 színlehetőség, ezért
$V_2^{7,i} \cdot V_2^{8,i} = 2^{15} = 32768$

## 5. Ismétlés nélküli kombináció

**Hányféleképpen lehet *n* különböző elemből kiválasztani *k* elemet úgy, hogy a sorrend nem számít, és minden elemet csak egyszer választhatunk?**

**0.** **Egy 14 fős csoportban hányféleképpen lehet 5 egyforma könyvet kiosztani, ha mindenki 1 könyvet kaphat?**

Az első könyvet 14 tanulónak adhatjuk. A második könyvet a maradék 13 tanulónak adhatjuk. És így tovább…

| hely | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
|---|---|---|---|---|---|
| lehetőség | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 |

Összesen 14·13·12·11·10 – féleképpen oszthatjuk ki a könyveket, úgy hogy a sorrend számít.

Másképpen: $\frac{14!}{(14-5)!}$ eset lehetséges.

Igen ám, de egyformák a könyvek. A kiválasztott 5 tanulót akárhogy állítjuk sorba, ugyanazt az esetet kapjuk, mert ugyanaz a könyv lesz náluk. Az esetek száma annyiadrészre csökken, ahányféleképpen a kiválasztott öt tanulót sorba tudjuk rendezni.

Így a lehetőségek száma: $\frac{\frac{14!}{(14-5)!}}{5!} = \frac{14!}{(14-5)! \cdot 5!}$

**Hogy ne kelljen annyit írni, ezt a törtet úgy jelöljük, hogy $C_{14}^{5}=\binom{14}{5}$**

**/olvasd. 14 alatt az öt/ és binominális együtthatónak nevezzük.**

**Általánosan: $C_n^k=\binom{n}{k}$ (olvasd n alatt a k).**

## Általános képlet

***n* különböző elemből $C_n^k=\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ - féleképpen lehet kiválasztani *k* elemet úgy, hogy a sorrend nem számít, és minden elemet csak egyszer választhatunk.**

**1. Hány lottószelvényt kell kitölteni, hogy 5 találatosunk legyen?**

**Az ötös lottón az 1, 2,… , 90 számok közül kell kiválasztani 5 számot úgy, hogy a sorrend mindegy.**

**Ezt $C_{90}^{5}=43\,949\,268$ - félképpen tehetjük meg.**

**Tehát a biztos ötös találathoz majdnem 44 millió szelvényt kéne kitölteni. Nem túl gazdaságos. Számold ki mennyibe kerülne!**
**A hatos lottón 1, 2,… , 45 számok közül kell 6 számot úgy, hogy a sorrend mindegy.**

**Ezt $C_{45}^{6}=8\,145\,060$ - félképpen tehetjük meg. Itt kevesebb szelvényt kell kitölteni, de kevesebbet is fizet.**

**2. Egy kalapban van 20 különböző színű golyó. Belemarkolunk a kalapba és kiveszünk ötöt. Ezt hányféleképpen tehetjük meg?**

**A kiválasztott öt golyó sorrendje nem számít, ezért $C_{20}^{5}=15\,504$ vehetünk ki öt golyót.**

**3. Egy műhelyben egy műszak alatt elkészített 500 darab zár között 4% selejtes. Hányféleképpen lehet közülük kiválasztani 10 zárat úgy, hogy**
- **a.) mind a 10 selejtes legyen,**
- **b.) 5 selejtes legyen?**

**500·0,04 = 20 $\Rightarrow$20 zár selejt és 480 zár jó. A zárak egyformák ezért a kiválasztott elemek sorrendje nem számít.**

**a.) A 20 selejtből kell választani mind a tizet. A lehetőségek száma:**

$$C_{20}^{10}=184\,756$$

**b.) Ötöt a <u>selejtekből</u> kell választani, ez $C_{20}^{5}=15\,504$ féle képpen lehetséges.**

**Ötöt a <u>jókból</u> kell választani, ez $C_{480}^{5}$ - féle képpen lehetséges.**

**Bármelyik 5 jó mellé bármelyik öt rosszat párosíthatjuk, az lehetséges kiválasztások száma:**

$$C_{20}^{5}\cdot C_{480}^{5}$$

**4. Egy csomag magyar kártyából húzzunk ki találomra 7 lapot. Hány esetben lehet a kihúzott lapok között 1 király?**

**A kihúzott lapok sorrendje mindegy. Az a lényeges, hogy milyen lapokat kapunk, a sorrendjük nem számít a kezünkben.**

**A 4 királyból egyet $C_4^1 = 4$ - féleképpen választhatunk.**

**Kell még 6 nem király. A 28 nem királyból hatot $C_{28}^6 = 376\,740$ - féleképpen választhatunk. Bármelyik királyt bármelyik hat nem királlyal összepárosíthatjuk ezért az összes lehetőségek számát az egyes lehetőségek számának a szorzata adja:**

$$\underbrace{C_4^1 \cdot C_{28}^6 = \binom{4}{1}}_{\text{4 királyból egy}} \cdot \underbrace{\binom{28}{6}}_{\text{a 28 nem királyból 6}} = 1\,506\,960$$

**5. Egy önkiszolgáló étterem pultján 6 különböző leves és 9 különböző főzelék áll. Hányféle lehet egy 4 fős társaság együttes fogyasztása, ha mindenki eszik levest is és főzeléket is?**

$$C_6^4 \cdot C_9^4 = 1890$$

**6. Egy hallgatónak 20 egykötetes regénye és 8 verseskötete van. Magával akar vinni 5 kötetet. Hányféleképpen teheti ezt meg, ha a kiválasztottak közt verseskötetеknek is kell lennie?**

**$C_{28}^5 - C_{20}^5 = 8276$ (Összes lehetőség- csak regény választás).**

**7. Egy 20 fős üdülő társaság 5 fős turnusokban ebédel. Hányféleképpen lehetséges ez?**

$$C_{20}^5 \cdot C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 \cdot C_5^5 = \frac{20!}{(5!)^4}$$

**8. Hány átlója van egy szabályos 12 oldalú sokszögnek?**

**A 12 db háromanként nem kollineáris pontból 2-2-t választva „meghúzzuk” az összes lehetséges egyenest. Ezek között a sokszög oldalai is ott lesznek, tehát ezeket levonjuk. Azért van szó kombinációról, mert a két kiválasztott pont sorrendje nem számít (nem számít, hogy „oda, vagy vissza húzzuk” az egyenest).**

$$C_{12}^2 = \frac{V_{12}^2}{P_2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$$

**66 – 12 = 54 (db átló)**

**9. Egy polcon 15 üveg bor van: 10 fehér és 5 vörös. Hányféle módon lehet kiválasztani ezek közül 6 üveggel, hogy közötte 2 üveg vörös bor legyen?**

$C_5^2 = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \quad (vörös\ bor) \qquad C_{10}^4 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \quad (fehér\ bor)$

*Tehát* $C_5^2 \cdot C_{10}^4 = 210 \cdot 10 = 2100$ *féleképpen.*

**10. Egy 32-es létszámú osztályban létre kell hozni egy 5 tagú bizottságot, amelyben legyen 1 titkár, a másik 4 csak tag. Hány olyan eset van, amikor Kovács Éva:**

**a.) titkára a bizottságnak?**
**b.) nem titkár, de tag a bizottságban?**
**c.) szerepel a bizottságban?**

**a.)Ha Kovács Éva a titkár, akkor a maradék 31 tanulóból választunk 4 helyre:**

$C_{31}^4 = \dfrac{31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 31\,465$.

**b.)Valaki titkár lesz, Kovács Éva tag.**
**A titkár helyére 31 féle választás van.**
**A 3 tag helyére $C_{30}^3$ (3 helyre választunk, mert a titkárt már kiválasztottuk és Kovács Éva is elfoglalt egy helyet.)**

**Tehát Ö = 31·**$C_{30}^3 = 31 \cdot \dfrac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 31 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 28 = 125\,860$.

**c.)Az előző kettőből következik, hogy $C_{31}^4$ + 31·$C_{30}^3$ = 157 325.**

**11. Egy osztályból 17 fiú 2 napos túrára megy. Éjszakára a turistaházban 1 darab 8 ágyas, 1 darab 4 ágyas, 1 darab 3 ágyas és 1 darab 2 ágyas szobában kapnak szállást. Hányféleképpen helyezkedhetnek el a szobákban, ha az egy szobában lévő fekvőhelyek között nem teszünk különbséget?**

**Mivel a fekhelyeket nem különböztetjük meg, a sorrend nem számít.**
**8 ágyas szobába a 17 fiúból sorsolunk ki nyolcat: ez $C_{17}^8$ -féleképpen lehetséges.**
**4 ágyas szobába a maradék 9 fiúból sorsolunk ki négyet: ez $C_9^4$ -féleképpen lehetséges.**
**3 ágyas szobába a maradék 5 fiúból sorsolunk ki hármat: ez $C_5^3$ -féleképpen lehetséges.**
**2 ágyas szobába a maradék két fiú megy: egyféleképpen lehetséges.**
**Az összes esetek száma: $C_{17}^8 \cdot C_9^4 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2$**

**12. A síkban adott n pont, ahol k pont ugyanazon az egyenesen helyezkedik el, a többi viszont hármanként nem kollineáris.**
**a) Hány egyenessel kötjük össze ezeket a pontokat?**
**b) Hány különböző háromszög csúcsait helyezhetjük el ezeken a pontokban?**

**a)** $C_n^2 - C_k^2 + 1$ **b)** $C_n^3 - C_k^3$

**13. Egy társaságban mindenki mindenkivel kezet fogott. Összesen 66 kézfogás történt. Hányan voltak a társaságban?**

**Megoldás:** $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} = 66$ **ahonnan n= 12**

**14. Hányféleképpen olvashatjuk ki a MICIMACKÓ szót a következő táblázatból?**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| M | I | C | I | M | A |
| I | C | I | M | A | C |
| C | I | M | A | C | K |
| I | M | A | C | K | Ó |

**A bal felső sarokból a jobb alsó sarok felé kell haladnunk, csak jobbra vagy lefelé léphetünk.**

**Összesen 5-öt kell lépni jobbra és 3-at kell lépni lefelé, ez összesen 8 hely .**

**1. megoldás:**
**Nyolc hely van. Ebből ki kell választani hármat, úgy hogy a sorrend mindegy és ezekre a helyekre írjuk az l betűket, a többi helyre a j betűket.**
**Ezt** $C_8^3 = 56$ **-féleképpen tehetjük meg.**

**pl. a JJJLLJLJ sorozat annak felel meg, hogy jobbra, jobbra, jobbra, le, le, jobbra, le, jobbra**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| M | I | C | I | M | A |
| I | C | I | M | A | C |
| C | I | M | A | C | K |
| I | M | A | C | K | Ó |

**2. megoldás:**
**Nyolc hely van. Ebből ki kell választani hármat, úgy hogy a sorrend mindegy és ezekre a helyekre írjuk a j betűket, a többi helyre az l betűket.**
**Ezt** $C_8^5 = 56$ **-féleképpen tehetjük meg.**
**3. megoldás: Annyi útvonal van, amennyiszer sorba lehet rendezni 5 J és 3 L betűt:** $P_8^{3,5} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$
**4. Megoldás: rekurzív számlálással**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| M | $I^1$ | $C^1$ | $I^1$ | $M^1$ | $A^1$ |
| $I^1$ | $C^2$ | $I^3$ | $M^4$ | $A^5$ | $C^6$ |
| $C^1$ | $I^3$ | $M^6$ | $A^{10}$ | $C^{15}$ | $K^{21}$ |
| $I^1$ | $M^4$ | $A^{10}$ | $C^{20}$ | $K^{35}$ | $Ó^{56}$ |

**Megjegyzés:** $P_n^{k,n-k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = C_n^k$

**15. Egy csomag 52 lapos franciakártya-csomagból 10 lapot húzunk ki. Hány esetben lesz ezek között:**

a) király b) pontosan 1 király c) legalább 2 király d) pontosan 2 király?

Az 52 lap közül 10 lapot $C_{52}^{10}$-féleképpen húzunk ki. Mivel a csomagban 4 király van, ezért $C_{48}^{10}$ esetben NEM húzunk királyt.

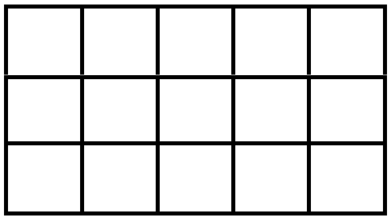
a) legalább 1 királyt: $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$

b) pontosan egy királyt: $C_{48}^{9} \cdot C_{4}^{1}$

c) legalább két királyt: $C_{52}^{10} - C_{48}^{10} - C_{48}^{9} \cdot C_{4}^{1}$

d) d) pontosan 2 királyt akkor húzunk ki, ha a 4 király közül választunk ki kettőt, a többi nyolc lapot pedig a maradék 48 lapból, tehát: $C_{48}^{8} \cdot C_{4}^{2}$

16. Hány téglalap alakítható ki az ábrán levő 15 egységnyi területű téglalapból, ha a rácspontok lehetnek a téglalap csúcsai?



$C_6^2 \cdot C_4^2 = 15 \cdot 6 = 90$ mert egy téglalapot 4 csúcs határoz meg, a vízszintes 6 pont közül 2-öt $C_6^2$-féleképpen, a függőleges 4 pont közül 2-öt $C_4^2$-féleképpen választhatunk ki, a megoldás a kettejük szorzata.

## 6. Ismétléses kombináció

Hányféleképpen lehet *n* különböző elemből kiválasztani *k* elemet úgy, hogy a sorrend nem számít, és minden elemet többször is választhatunk? (Ezúttal k > n is lehetséges!)

0. Egy 10 fős csoportban hányféleképpen lehet 4 egyforma könyvet kiosztani, ha mindenki több könyvet is kaphat?

Az ismétléses kombináció képlete a következő gondolatmenet alapján könnyen megalkothatjuk az általános képletét.
Mindenki nevét írjuk rá egy-egy cédulára, és a cédulákat tegyük bele egy kalapba. Ha valakinek kihúztuk a nevét, megkapja a könyvét, és a céduláját visszatesszük a kalapba. Az utolsó húzás után már nem kell visszatenni a cédulát. Tehát négy húzás után 3-szor kell visszatenni a cédulát. Így ugyanannyi eset van, mintha 13 tanulóból kéne kiválasztani négyet:

$$C_{13}^{4} = 715$$

Sejtés: n = 14 k = 4 13 = n + k –1

$$C_n^{k,i} = C_{n+k-1}^{k}$$

**n elemből kell kiválasztani k elemet úgy, hogy a sorrend nem számít, és minden elemet többször is választhatunk.**
**Az elemek nevét írjuk rá egy cédulára. A cédulákat tegyük bele egy kalapba. A kihúzott elem céduláját k – 1-szer tehetjük vissza, ha k–szor húztunk a kalapból. Ugyanannyi eset van a többszöri választásnál, ahányszor ki lehet választani n + k – 1 elemből k elemet, úgy hogy minden elemet csak egyszer választhatunk.**

## Általános képlet

***n* különböző elemből $C_n^{k;i} = C_{n+k-1}^{k}$ - féleképpen lehet kiválasztani *k* elemet úgy, hogy a sorrend nem számít, és minden elemet többször is választhatunk.**

**1. Egy 30 fős létszámú osztályban 9 azonos tollat sorsolnak ki. Hányféleképpen történhet a tollak szétosztása, ha egy tanuló a.) csak egy tollat kaphat; b.) több tollat is kaphat?**

**a.) Mindegy, hogy milyen sorrendben választjuk ki a gyerekeket, mert a tollak egyformák.**

**A lehetőségek száma:** $C_{30}^{9} = 14\,307\,150$

**b.)**

$$C_{30}^{9,i} = C_{30+9-1}^{9} = 163\,011\,640$$

**2. 5 doboz mindegyikében 12 darab, 1- től 12- ig számozott gépalkatrész van. Hányféleképpen vehetünk ki minden dobozból egy-egy alkatrészt, ha a kivett alkatrészek sorrendjére nem vagyunk tekintettel?**

$$C_{12}^{5,i} = C_{12+5-1}^{5} = C_{16}^{5} = \frac{16!}{5!11!}$$

**3. Egy urnában 20 cédula van 1-től 20-ig megszámozva. Kihúzunk 5 cédulát úgy, hogy minden húzás után a cédulát visszatesszük. Hány esetben lesz a kihúzott legkisebb szám nagyobb 6-nál?**

$$C_{20-4}^{5,i} = C_{14+5-1}^{5} = C_{18}^{5}$$

**4. Egy osztályban a tanár elhatározta, hogy az első sorban ülő 4 tanulót fogja a táblához szólítani. A tanár 2 alkalommal szólít a táblához. Számítsuk ki, hányféle változatban mehettek a táblához, ha ugyanaz a személy kétszer is kimehetett, és a sorrendet nem vesszük figyelembe!**

$$C_{4}^{2,i} = C_{4+2-1}^{2} = C_{5}^{2} = 10$$

**5. Hányféleképpen osztható fel 10 000 Ft ösztöndíj 7 tanuló között akkor, ha az ösztöndíjaknak 100-Ft-tal oszthatóknak kell lenniük?**

$$C_{7}^{100,i} = C_{100+7-1}^{100} = C_{106}^{100} = C_{106}^{6} = 1705900000$$

**6. Egy országban 6 bank bocsájt ki 5000 Ft névértékű letéti jegyet. Hányféleképpen költhetünk el 25 000 Ft-ot letéti jegyek vásárlására?**

$$C_6^{5,i} = C_{6+5-1}^5 = C_{10}^5 = 252$$

**7. Hét azonos alkatrész mindegyikét négy különböző szín valamelyikére befestjük. Hányféle festés jöhet létre?**

$$C_4^{7,i} = C_{7+4-1}^7 = C_{10}^7 = C_{10}^3 = 120$$

**8. Egy 18 fős társaság vezetőt választ 4 jelölt közül. Mindenki egy-egy jelöltre szavazhat. Hányféle szavazási eredmény születhet?**

$$C_4^{18,i} = C_{18+4-1}^{18} = C_{21}^{18} = C_{21}^3 = 1330$$

**9. Egy 6 tagú kollektívában 6000 Ft szociális segély osztható fel. Hányféleképpen lehetséges ez akkor, ha:**
**a) a segélyeknek 100-zal oszthatónak kell lenniük**
**b) a segélyek 100-zal oszthatók, és aki kap, az 500 Ft-nál kevesebbet nem kaphat**
**c) a segélyek 100-zal oszthatók, és mindenki kap legalább 500 Ft segélyt.**

**a)** $C_6^{60,i} = C_{6+60-1}^{60} = C_{65}^{60} = C_{65}^5 = 8259888$ **(a 6000:100= 60 db 100 Ft-oshoz kiválasztunk 1-1 nevet).**
**b)** $C_1^{55,i} + C_2^{50,i} + C_3^{45,i} + C_4^{40,i} + C_5^{35,i} + C_6^{30,i} = 420357$ **(a segély kiosztható 1,2,3,4,5,6 személynek, mindegyik megkap 500 Ft-ot, a maradék 55, 50, 45, 40, 35, 30 db 100 Ft-oshoz 1-1 nevet rendelünk.**
**c)** $C_6^{30,i} = C_{6+30-1}^{30} = C_{35}^{30} = C_{35}^5 = 324632$

**10. Egy szervező bizottság tagjainak 3 darab 100 Ft-ost vásárlási utalványt osztanak ki. Ha egy személy több utalványt is kaphat, 64-gyel több kiosztási lehetőség adódik, mintha személyenként legfeljebb egy darab juttatható. Hány fős a bizottság?**

$C_n^{3,i} - C_n^3 = 64$ **ahonnan n= 8**