

A Cauchy függvényegyenlet és néhány rokon probléma

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A függvényegyenletek egyik alapegyenlete a Cauchy függvényegyenlet, amely a következő:

„Melyek azok az $f : R \rightarrow R$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x+y) = f(x) + f(y)$ egyenletet, minden $x, y \in R$ esetén?” (*)

Noha a függvényegyenletet Cauchy már 1821-ben megoldotta, és azóta számos megoldása látott napvilágot, mégis hasznosnak tartjuk, hogy bemutassuk egy konstruktív megoldását, ugyanis ez a technika számos más függvényegyenlet megoldásánál alkalmazható.

A Cauchy függvényegyenlet megoldása konstruktív módon jól meghatározott lépésekben történik, ezek a következők:

1) A (*) egyenletben legyen $x=y=t$, ekkor kapjuk, hogy $f(2t)=f(t)+f(t)=2f(t)$. Ha most az $x=t$ és $y=2t$ értékeket adjuk, akkor $f(3t)=f(t)+f(2t)=3f(t)$. Ezek alapján kialakul az a sejtés, hogy $f(nt)=nf(t)$ ahol $n \in N$. Ezt indukcióval bizonyíthatjuk is. Valóban, ha a (*) egyenletbe $x=t$ és $y=nt$, akkor $f(t+nt)=f(t)+f(nt)=f(t)+nf(t)=(n+1)f(t)$. Tehát $f(nt)=nf(t) \forall n \in N$ és $t \in R$. (**)

2) Bizonyítani fogjuk, hogy $f(x)=ax$ minden $x \in N$ esetén.

Ha most a (**)-ban $t=1$, és $f(1)=a$, akkor $f(n)=an$, vagyis $f(x)=ax$ minden $x \in N$ esetén.

3) Bizonyítani fogjuk, hogy $f(x)=ax$ minden $x \in Z$ esetén.

Ha a (*)-ban $x=y=0$, akkor $f(0)=f(0)+f(0)$, ezért $f(0)=0$. Ha pedig $x=t$ és $y=-t$, akkor $f(0)=f(t)+f(-t)$ vagyis $0=f(t)+f(-t)$, ahonnan $f(-t)=-f(t)$. Ha a (**)-ban t helyett $-t$ értéket veszünk, akkor $f(-nt)=nf(-t)=-nf(t)$ adódik, és a $t=1$ értékre kapjuk, hogy $f(-n)=-a(-n)$, vagyis $f(x)=ax$ minden $x \in Z$ esetén.

4) Bizonyítani fogjuk, hogy $f(x)=ax$ minden $x \in Q$ esetén.

Ha a (**)-ban $t = \frac{1}{n}$, akkor $f(1) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$, ahonnan $f\left(\frac{1}{n}\right) = a \frac{1}{n}$.

Ha a (**)-ban most $t = \frac{1}{m}$, akkor $f\left(\frac{n}{m}\right) = nf\left(\frac{1}{m}\right) = na \frac{1}{m} = a \frac{n}{m}$, vagyis $f(x)=ax \forall x \in Q$.

5) Bizonyítani fogjuk, hogy $f(x)=ax$ minden $x \in R \setminus Q$ esetén.

Legyen $x \in R \setminus Q$ és $x_n \in Q$ úgy, hogy $x_n \rightarrow x$. Mivel $x_n \in Q$ ezért $f(x_n) = ax_n$. Ezért a határértékre térve felírható, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow \infty} ax_n$, ellenben az f folytonossága miatt

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{x \rightarrow \infty} x_n\right) = f(x)$, így $f(x)=ax$ adódik minden $x \in R$ esetén. Tehát bizonyítottuk,

hogy a (*) függvényegyenletet csak az $f(x)=ax$ függvény teljesíti, ahol $a=f(1)$.

A továbbiakban néhány olyan folytonos függvényegyenletet mutatunk be, amelyek visszavezethetők a (*) alapegyenletre.

1. Példa: Melyek azok az $f : R \rightarrow R$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x+y) = f(x) + f(y) + b$ egyenletet, minden $x, y \in R$ esetén, ha $b \in R$ adott szám?

Megoldás: Az egyenlet mindkét oldalához adjunk hozzá $b-t$, így ha bevezetjük az $f(x)+b=g(x)$ változócsere, akkor a függvényegyenlet alapján $g(x+y)=g(x)+g(y)$ adódik, aminek a megoldása $g(x)=ax$, ezért $f(x)+b=ax$, így $f(x)=ax-b$ és $a=f(1)+b$.

A következő függvényegyenlet Pexider-féle additív függvényegyenlet nevet viseli.

2. Példa: Melyek azok az $f, g, h : R \rightarrow R$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x+y) = g(x) + h(y)$ egyenletet, minden $x, y \in R$ esetén?

Megoldás: Legyen $x=y=0$, ezért $f(0)=g(0)+h(0)$. Ha most csak $x=0$, akkor $f(y)=g(0)+h(y)$ (1),

Ha pedig csak $y=0$, akkor $f(x)=g(x)+h(0)$ (2). Összegezve az (1) és (2) összefüggéseket $f(x)+f(y)=g(x)+h(y)+g(0)+h(0)$ adódik, vagyis $f(x)+f(y)=f(x+y)+f(0)$. Észrevehető, hogy az $f(0)=-b$ jelöléssel éppen az előző függvényegyenletet kaptuk, ezért $f(x)=ax-b$. Így az (1) alapján $h(y)=ay-b-g(0)$ és a (2) alapján $g(x)=ax-b-h(0)$.

A következő példa a Pexider egyenlet általánosabb formája, 3 függvény helyett 4 függvényre, és a bizonyításból kiderül, hogy tovább általánosítható több tag esetén is.

3. Példa: Melyek azok az $\varphi, f, g, h: R \rightarrow R$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $\varphi(x+y+z)=f(x)+g(y)+h(z)$ egyenletet, minden $x, y, z \in R$ esetén?

Megoldás: Legyen $x=y=z=0$, azért $\varphi(0)=f(0)+g(0)+h(0)$. Most legyenek rendre csak $y=z=0$, majd $x=z=0$, majd $x=y=0$. Ekkor rendre kapjuk, hogy:

$\varphi(x)=f(x)+g(0)+h(0)$; $\varphi(y)=g(y)+f(0)+h(0)$; $\varphi(z)=h(z)+f(0)+g(0)$. (i) Ha most ezeket összegezzük kapjuk, hogy

$$\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z)=f(x)+g(x)+h(x)+2[f(0)+g(0)+h(0)] \text{ vagyis}$$

$$\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z)=\varphi(x+y+z)+2\varphi(0), \text{ ahol ha } z=0, \text{ akkor}$$

$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)-\varphi(0)$ így az 1. Példa alapján $\varphi(x)=ax+b$ ahol $b=\varphi(0)$. Ha bevezetjük az $f(0)=b_1$, $g(0)=b_2$, $h(0)=b_3$ jelöléseket, akkor az (i) egyenletek alapján kapjuk, hogy $f(x)=ax+b_1$, $g(x)=ax+b_2$, $h(x)=ax+b_3$ és $b_1+b_2+b_3=b$.

A következő függvényegyenlet Pexider-féle multiplikatív függvényegyenlet nevet viseli.

4. Példa: Melyek azok az $f, g, h: R \rightarrow (0, \infty)$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x+y)=g(x) \cdot h(y)$ egyenletet, minden $x, y \in R$ esetén?

Megoldás: Logaritmáljuk az egyenlet mindkét oldalát a természetes alapú logaritmussal. Ekkor $\ln f(x+y)=\ln g(x)+\ln h(y)$ adódik, ami $F(x+y)=G(x)+H(y)$ alakú additív típusú Pexider egyenlet, ennek megoldását már láttuk a 2. Példában, aminek alapján azonnal adódik, hogy a megoldások $f(x)=ab \cdot e^{cx}$, $g(x)=a \cdot e^{cx}$, $h(x)=b \cdot e^{cx}$ alakúak.

Belátható, hogy a multiplikatív Pexider egyenlet is általánosítható 3-nál több függvény esetén is.

A következő három példa függvényegyenlete külalakra és tartalmilag is nagy rokonságot mutatnak a Cauchy függvényegyenlettel.

5. Példa: Melyek azok az $f: R \rightarrow (0, \infty)$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x+y)=f(x)f(y)$ egyenletet, minden $x, y \in R$ esetén?

Megoldás: Logaritmáljuk az egyenlet mindkét oldalát a természetes alapú logaritmussal. Ekkor $\ln f(x+y)=\ln f(x)+\ln g(y)$ adódik, és ha $g(x)=\ln f(x)$, akkor $g(x+y)=g(x)+g(y)$, tehát $g(x)=ax$, ezért $f(x)=e^{ax}$.

6. Példa: Melyek azok az $f: (0, \infty) \rightarrow R$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x \cdot y)=f(x)+f(y)$ egyenletet, minden $x, y \in R$ esetén?

Megoldás: Az exponenciális függvény $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ tulajdonságára gondolva vezessük be a következő változócserét: $g(x)=f(e^x)$. Ekkor $g(x+y)=f(e^{x+y})$ és $g(x)+g(y)=f(e^x)+f(e^y)=f(e^x \cdot e^y)=f(e^{x+y})$ vagyis $g(x+y)=g(x)+g(y)$ ezért $g(x)=ax$ vagyis $f(e^x)=ax$ és ha most x helyett $\ln x$ -et írunk, $f(x)=a \ln x$ adódik.

7. Példa: Melyek azok az $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x \cdot y)=f(x) \cdot f(y)$ egyenletet, minden $x, y \in R$ esetén?

Megoldás: Most a logaritmus függvény $\ln x + \ln y = \ln xy$ tulajdonságára gondolva, vezessük be a $g(x)=\ln f(e^x)$ változócserét. Ekkor $g(x+y)=\ln f(e^{x+y})$ és

$g(x) + g(y) = \ln f(e^x) + \ln f(e^y) = \ln f(e^x) \cdot f(e^y) = \ln f(e^x \cdot e^y) = \ln f(e^{x+y})$ ami alapján $g(x+y) = g(x) + g(y)$, tehát $g(x) = ax$, ezért $\ln f(e^x) = ax$ ahonnan $f(e^x) = e^{ax}$ és most az e^x helyett x -et írva kapjuk, hogy $f(x) = x^a$.

8. Példa: Melyek azok az $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x \cdot y) = xf(y) + yf(x)$ egyenletet, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén?

Megoldás: Vegyük észre, hogy ha az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk xy -nal, akkor bevezethető a $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ változócsere, és $g(xy) = g(x) + g(y)$ adódik, aminek a megoldása a

6. Példa alapján $g(x) = a \ln x$, tehát $\frac{f(x)}{x} = a \ln x$ ahonnan $f(x) = ax \ln x$.

9. Példa: Határozzuk meg azokat az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre teljesülnek a következő feltételek:

a) f folytonos az \mathbb{R} -en

b) $\lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - t] = \infty$

c) $f(x+y) = f(x)f(y) - xf(y) - yf(x) + xy + x + y$ minden valós x, y értékre, és $f(1) = e + 1$.

Megoldás: Könnyen észrevehető, hogy ha bevezetjük a $g(x) = f(x) - x$ változócsere, akkor $g(x+y) = g(x)g(y)$ ezért az 5. példa alapján $g(x) = e^{ax}$ ahonnan $f(x) = e^{ax} + x$. A b) feltételből $k \neq 0$ és az $f(1) = e + 1$ alapján $k = 1$, tehát $f(x) = e^x + x$.

10. Példa: Határozzuk meg azokat az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, amelyekre teljesülnek a következő feltételek:

1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a} = e^a$, ahol $a = \text{állandó}$

2) $(x-a)(y-a)f(x+y) = (x+y-a)f(x)f(y)$ minden valós x, y értékre.

Megoldás: Vezessük be a következő segédfüggvényt: $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-a} & x \neq a \\ e^a & x = a \end{cases}$. Az 1) alapján ez

folytonos, és a 2) alapján teljesül a $g(x+y) = g(x)g(y)$ függvényegyenlet, így az 5. példa alapján $g(x) = e^{ax}$, és $g(a) = 1$, ezért a változócsere alapján $f(x) = (x-a) \cdot e^x$.

A következő függvényegyenlet a Jensen-féle függvényegyenlet nevet viseli.

11. Példa: Melyek azok az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az

$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ egyenletet, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén?

Megoldás: Végezzük ez az x helyett az $x+y$ helyettesítést, így kapjuk, hogy

$f\left(\frac{x+2y}{2}\right) = \frac{f(x+y)+f(y)}{2}$. Legyen most $y=0$, ezért $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)+f(0)}{2}$ adódik. Most

helyettesítsük az x -et $(x+y)$ -nal, ezért $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y)+f(0)}{2}$, és az eredeti

függvényegyenlet alapján kapjuk, hogy $f(x+y) + f(0) = f(x) + f(y)$ és az 1. Példa alapján kapjuk, hogy $f(x) = ax + b$ ahol $a = f(1) - f(0)$ és $b = f(0)$.

12. Példa: Melyek azok az $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az

$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x) \cdot f(y)}$ egyenletet, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén?

Megoldás: Végezzük ez az x helyett az $x+y$ helyettesítést, így kapjuk, hogy

$$f\left(\frac{x+2y}{2}\right) = \sqrt{f(x+y) \cdot f(y)}. \text{ Legyen most } y=0, \text{ ezért } f\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{f(x) \cdot f(0)} \text{ adódik. Most}$$

helyettesítsük az x -et $(x+y)$ -nal, ezért $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x+y) \cdot f(0)}$ ahonnan felírható, hogy

$$f^2\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x+y) \cdot f(0) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{és} \quad \text{logaritmálva kapjuk, hogy}$$

$\ln f(x+y) \cdot f(0) = \ln f(x) \cdot f(y)$ vagyis $\ln f(x+y) + \ln f(0) = \ln f(x) + \ln f(y)$ ahol bevezetve a $g(x) = \ln f(x) - \ln f(0)$ változócsere a $g(x+y) = g(x) + g(y)$ adódik, így $g(x) = ax$ ezért $\frac{f(x)}{f(0)} = e^{ax}$ ahonnan $f(x) = \alpha \cdot e^{ax}$, ahol $\alpha = f(0)$ és $a = \ln \frac{f(1)}{f(0)}$.

13. Példa: Melyek azok az $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az

$$f(x) + f(y) = f\left[(x^n + y^n)^{\frac{1}{n}}\right] \text{ egyenletet, minden } x, y \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N} \text{ esetén?}$$

Megoldás: Az $n=1$ esetén visszakapjuk a Cauchy függvényegyenletet, amelynek a megoldása $f(x) = ax$. Legyen most $n \geq 2$. Helyettesítsük x -et $\sqrt[n]{x}$ -el és az y -t $\sqrt[n]{y}$ -nal. Ekkor felírható, hogy $f(\sqrt[n]{x}) + f(\sqrt[n]{y}) = f(\sqrt[n]{x+y})$. Vezessük be most a $g(x) = f(\sqrt[n]{x})$ változócsere. Ekkor kapjuk, hogy $g(x+y) = g(x) + g(y)$, aminek a megoldása $g(x) = ax$, ezért $f(\sqrt[n]{x}) = ax$ ahonnan $f(x) = ax^n$ adódik, ahol $a = f(1)$.

14. Példa: Melyek azok az $f : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 1)$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(1) = -1$, $f(x+y) = f(x) + f(y) - f(x)f(y)$ függvényegyenletet, minden valós x, y esetén?

Megoldás: Vezessük be a $g(x) = \ln(1-f(x))$ változócsere. Számolással azonnal adódik, hogy $g(x+y) = g(x) + g(y)$, ezért $g(x) = ax$, így $f(x) = 1 - e^{ax}$. Az $f(1) = -1$ alapján $a = \ln 2$, így $f(x) = 1 - 2^x$.

15. Példa: Melyek azok az $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \text{ minden } x, y \in (-1, 1) \text{ esetén?}$$

Megoldás: Emlékeztetünk arra, hogy $th(\alpha + \beta) = \frac{th\alpha + th\beta}{1 + th\alpha \cdot th\beta}$, ahol $thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Ezért végezzük el az $x = th\alpha$ és $y = th\beta$ helyettesítéseket. Ekkor az eredeti függvényegyenletről, az említett számolási képlet alapján $f(th\alpha) + f(th\beta) = f(th(\alpha + \beta))$ adódik, így ésszerű a $g(x) = f(thx)$ változócsere mindezek alapján $g(x+y) = g(x) + g(y)$ adódik, aminek a megoldása $g(x) = ax$, ezért $f(thx) = ax$, ahonnan $f(x) = a(\operatorname{arcthx})$.

Befejezésül megjegyezzük, hogy különféle változócserekkel, a Cauchy függvényegyenletről bárki szerkeszthet az előbbire visszavezethető függvényegyenletet.

Szakirodalom

[1] C. Ionesci-Tiu, Liviu Parsan: Calcul diferencial si integral pentru admitere in facultate, Editura Albatros, 1975

[2] Mihai Onucu Drimbe: 200 de ecuatii functionale pe $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, Editura Gil, 2003