Az invariancia elve

Léteznek olyan feladatok, amelyek esetén adott két konfiguráció és bizonyos lehetséges lépések (transzformációk) halmaza. A kérdés az, hogy adott lehetséges, véges számú lépés (transzformáció) alkalmazásával az egyik konfigurációból megkaphatjuk-e a másikat?

A negatív választ beláthatjuk a következő módon: a konfigurációk halmazán értelmezzünk egy függvényt. A függvényérték lehet egy szám vagy egy logikai érték. Tegyük fel, hogy a függvény értéke nem változik, ha egy lépést (transzformációt) végrehajtunk. Tehát a függvény az adott típusú lépésekre (transzformációkra) nézve invariáns.

Ha a kiinduló helyzetben és a célhelyzetben az invariáns értéke különböző, akkor a kiinduló helyzetből a célhelyzet nem érhető el véges számú sok lépés (transzformáció) sorozatával.

Mind a valódi életben, mind a matematikai feladatok körében a megoldást az nehezíti, hogy az adott konfigurációk állapotainak a halmaza, valamint a lehetséges lépések (transzformációk) halmaza olyan nagy vagy annyira bonyolult, hogy a helyzet teljesen áttekinthetetlen.

Másfelől a helyzetet az is tovább nehezíti, hogy nem nyilvánvaló, melyik az az invariáns, amely éppen célravezető.

Ebből kifolyólag az invariánsok keresése a matematika sok részében hasznosnak bizonyul, hiszen a feladatok struktúrájának csak részleges ismeretében is képesek lehetünk megoldást találni.

Példa

Le lehet-e fedni az 1 cm oldalhosszúságú szabályos háromszöget 35 darab 1/17 cm sugarú körrel? Ekkor, anélkül, hogy belegondolnánk, hányféleképpen lehet 35 kört a síkban elhelyezni, észrevehető, hogy a körök összterülete $35 \cdot \left(\frac{1}{17}\right)^2 \cdot \pi \text{ cm}^2$ kisebb, mint a háromszög területe $\frac{\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$. Ezért a lefedés nem lehetséges.

A feladatok során ilyen invariáns tulajdonságok lehetnek, például: adott számmal való osztás maradéka, adott számok összege, adott kifejezések számértéke, adott állítások logikai értéke stb.

A továbbiakban változatos feladatokon keresztül próbáljuk bemutatni a módszer lényegét, hatékonyságát, valamint matematikai szépségét.

7. feladat

A Csodakert fáin 25 banán és 30 narancs van. Minden alkalommal két gyümölcsöt veszünk le. Ha egyformákat veszünk le, akkor egy narancs nő helyettük; ha különbözőket veszünk le, akkor egy banán. Utolsónak milyen gyümölcs marad?

Megoldás

Könnyen észrevehető, hogy a fán levő páratlan számú banánmennyiség invariáns. Pontosabban: akárhogyan is szakítunk le egy-egy alkalommal két gyümölcsöt, a fán mindig páratlan számú banán marad. Ezt könnyű belátni, hiszen ha két banánt szakítunk le, helyette narancs terem és így a banánok száma (25, páratlan szám) kettővel csökken. Ha két narancsot szakítunk le, akkor a banánok páratlan száma változatlan marad. Amennyiben egy banánt és egy narancsot szakítunk le, helyettük egy banán terem, tehát a banánok száma ismét páratlan.

Így utoljára (amikorra egyetlen gyümölcs marad), a fán éppen egy banán lesz.

Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy a 25, illetve a 30 helyett bármilyen páratlan, illetve páros szám írható, utoljára úgy is egyetlen banán marad.

8. feladat

Huszonnégy papírlap közül néhányat tíz részre vágtak, majd az így kapott részek közül néhányat ismét tíz részre vágtak és így tovább. Egy ilyen munkaszakasz után valaki ezt mondta: „Most 2001 papírdarabunk van." Jól számolt-e az illető?

Megoldás

Mivel minden lépésben egy lapból tízet csináltunk, a lapok száma 9-cel nő, hiszen kaptunk tízet, és elfogyott egy, amit szétvágtunk. Tehát ha 9-cel osztunk, a maradék nem változik, invariáns.

Tekintettel arra, hogy eredetileg 24:9 = 2 (maradék 6) és végül pedig 2001:9 = 222 (maradék 3), biztos az, hogy az illető rosszul számolt. Ez örvendetes tény is, mert igen nehéz lett volna ezzel a módszerrel bebizonyítani, hogy valaki jól számolt.

9. feladat

Egy hosszú egyenes árokban bal oldalt egy sáska, középen egy szöcske, jobbra egy tücsök ül. Időnként valamelyik átugorja egyik szomszédját. Előfordulhat-e, hogy 2001 ugrás után újra a kiinduló sorrendben ülnek, ha végig csak az árokban (egy egyenes mentén) ugornak?

Megoldás

Legyen rendre a sáska, a szöcske, a tücsök jele: S, Sz és T. A kezdeti sorrendjük SSzT. Az ugrálgatások során előálló összes lehetséges sorrend:

$$\text{SSzT, SzTS, TSSz, STSz, SzST, TSzS} \qquad (*)$$

Ezek a három elem összes, ismétlés nélküli permutációi. A (*) sorrendek közül az első hármat „szabályosnak” nevezzük, az utolsó hármat pedig „szabálytalannak”. Az ugrálások során a „szabályos” és a „szabálytalan” sorrendek váltakozva követik egymást. Emiatt 2001 (azaz páratlan számú) ugrás után nem állhat vissza az eredeti sorrend.

Ebben az esetben is az invariáns a „páratlanság” volt.

Vizsgáljunk most néhány, matematikai vonatkozású példát is!

10. feladat

A táblára felírjuk az 1, 2, 3,…, 2000 természetes számot. Minden lépésben letörölünk két számot, a-t és b-t, és helyettük felírjuk az $a+b$-1 számot. Ha ezt az eljárást kétmilliószor megismételjük, milyen szám marad a táblán?

Megoldás

Minden törlés-felírás után a táblán levő számok összege 1-gyel csökken. Tehát az invariáns, az eredeti számok összege és az egyes törlés-felírás nyomán előálló különbség, az 1. A 2 000 000-dik törlés-felírás után a táblán egyetlen szám marad, mégpedig:

$$(1+2+3+...+2000)-2000000=2001\cdot 1000-2000000=1000\,.$$

11. feladat

Tekintsük a 2; az $1+\sqrt{2}$ és az $1-\sqrt{2}$ számot.

a) A számokkal a következő műveletet végezzük: a három szám közül mindegyiket helyettesítjük a másik két szám számtani középarányosával. Ha ezt az eljárást tetszőleges sokszor megismételjük, elérhető-e, hogy az 1; $2+\sqrt{2}$; $2-\sqrt{2}$ számot kapjuk?

b) A számokkal a következő műveletet végezzük: a három szám közül az egyiket változatlanul hagyjuk, a másik kettő helyett ezek összegének $\sqrt{2}$ -vel való osztási hányadosát, illetve ezek különbségének $\sqrt{2}$ -vel való osztási hányadosát írjuk. Ha ezt az eljárást tetszőleges sokszor megismételjük, elérhető-e, hogy az 1; $\sqrt{2}$ és $\frac{1}{\sqrt{2}}$ számokat kapjuk?

Megoldás

a) Ebben az esetben a három szám összege invariáns. Pontosabban: ha a, b, c három tetszőleges szám, a művelet végrehajtása során helyettük az $\frac{a+b}{2}$, $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+a}{2}$ számokat kapjuk, amelyek összege éppen $a + b + c$.

Jelen esetben induláskor $a+b+c=2+1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=3$, és amennyiben eljuthatnánk a kért számokhoz, $a+b+c=1+2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=5$ lenne, ami lehetetlen. Tehát a válasz: nem.

b) Ebben az esetben az invariáns éppen a három szám négyzetének összege. Pontosabban: ha a, b, c három tetszőleges szám, a művelet végrehajtása során például az $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$, $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$, c számokat kapjuk, és

$$\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2+c^2=a^2+b^2+c^2\,.$$

Jelen esetben induláskor $a^2+b^2+c^2=2^2+\left(1+\sqrt{2}\right)^2+\left(1-\sqrt{2}\right)^2=10$, de érkezéskor $a^2+b^2+c^2=1^2+\sqrt{2}^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=3{,}5$, ami ellentmondáshoz vezet. Tehát a válasz itt is nem.

12. feladat

0	3	2
6	7	0
4	9	5

Tekintsük a mellékelt ábrán látható 3×3 -as, számokkal kitöltött négyzethálót. Ennek két négyzetét akkor mondjuk szomszédosnak, ha van egy közös oldaluk. Bevezetjük a következő műveletet: két szomszédos négyzetben található számhoz hozzáadjuk ugyanazt a tetszőleges számot. Elérhető-e, hogy valahány lépés után a kapott négyzetháló négy sarkában 1-es, a többi négyzetben mind 0 legyen?

Megoldás

a	b	c
d	e	f
g	h	k

Ha a mellékelt ábrán látható hivatkozásokat használjuk, nem nehéz belátni, hogy a bevezetett műveletre vonatkozóan az

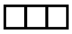
$S=(a+c+e+g+k)-(b+d+f+h)$ összeg invariáns!

Induláskor ez az összeg: $S=(0+2+7+4+5)-(3+6+9+0)=0$, míg érkezéskor ez az összeg: $S=(1+1+0+1+1)-(0+0+0+0)=4$ lenne, ami lehetetlen.

Tehát a föltett kérdésre a válasz: nem.

A módszer sikeresen alkalmazható az úgynevezett „parkettázási” problémák (a sík egyrétű, hézagmentes lefedése) esetén is.

13. feladat

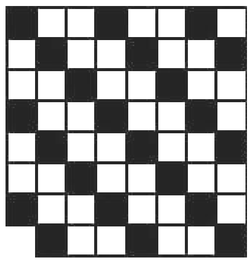
a) A 8×8 -as táblának eltávolítjuk valamelyik sarokmezőjét. Le tudjuk-e fedni a megmaradt felületet hézagmentesen és átfedés nélkül alakzatokkal, ahol a  „kisnégyzetek” mérete a sakktábla mezőméretével egyenlő?

b) Ugyanez a kérdés, ha kezdetben két, nem átlósan elhelyezkedő mezőt távolítjuk el.

Megoldás

a) A sarokmező eltávolítása után kapott „csonka tábla” mezőit színezzük ki a mellékelt ábra szerint. Vegyük észre, hogy minden sorban vagy oszlopban három egymás melletti mező közül pontosan egy fekete és kettő fehér. A 63 mező közül összesen 22 fekete, és $63 - 22 = 41$ fehér színű. Ha a lefedés lehetséges lenne, akkor a felhasznált „téglalapokba” kerülő fekete, illetve fehér mezők száma változatlan kellene, hogy legyen (ez az invariáns), mégpedig $63\cdot\frac{2}{3} = 42$ fehér és $63\cdot\frac{1}{3} = 21$ fekete mező lenne, és ez ellentmondás. Tehát a válasz: nem.

b) Belátható, hogy ha a két nem átlós sarokmezőt távolítjuk el (például a bal és jobb alsót), akkor a fenti színezéssel nem jutunk semmilyen ellentmondáshoz, vagyis a kérdést nem tudnánk megválaszolni. Ezért számozzuk meg a „csonka tábla” mezőit a mellékelt ábra szerint. (Most is használhatnánk színeket is, de ezúttal 3 szín kellene.) Számoljuk össze a táblán levő 0-s, 1-es és 2-es számjegyek számát. A 0-s 21-szer; az 1-es 21-szer és a 2-es $62 - (21+21) = 20$-szor fordul elő. Tehát a lefedés ebben az esetben is lehetetlen, ugyanis a lefedésre használt 1×3 -as téglalapokba ugyanannyi 0-s, 1-es és 2-es kellene, hogy jusson (ezek száma invariáns).



Az invariancia módszere különösen jól alkalmazható az ún. matematikai stratégiajátékok széles körében is (v.ö. [31] és ML5/1992, 181–186, oldal), ugyanis az a játékos, aki „jól játszik”, felfigyel arra az invariánsra, ami számára a kedvező nyerő-stratégiát biztosítja, az ellenfele bármely lépése esetén.

0	1	2	0	1	2	0	1
1	2	0	1	2	0	1	2
2	1	0	2	1	0	2	1
0	1	2	0	1	2	0	1
1	2	0	1	2	0	1	2
2	1	0	2	1	0	2	1
0	1	2	0	1	2	0	1
	2	0	1	2	0	1	

14. feladat

Az asztalon 27 gyufaszál van, két játékos felváltva vesz két vagy három szálat. Az a játékos nyer, aki utolsóként vesz. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája, és hogyan kell játszania, hogy nyerjen is?

Megoldás

Visszafelé okoskodva (erről részletesebben a II. rész 8. fejezetében olvashatunk): aki 4 gyufát hagy az asztalon, az már nyert. Előzőleg 8, korábban rendre 12, 16, 20, 24 szálat kell hagynia. Ezt a kezdő megteheti, és úgy vesz el a gyufaszálakból, hogy az ellenfele „lépése” ellenére, az asztalon rendre 24, 20, 16, 12, 8, 4 gyufaszál maradjon. Itt invariáns a 4, ami éppen eggyel több, mint a maximálisan elérhető gyufák száma.

15. feladat

Egy téglalap alakú asztalra két játékos felváltva egyforma pénzérméket helyez. (Nem szabad az ott levőkre rátenni, vagy azokat arrébb lökni!) Az győz, aki utoljára még tud tenni. A kezdő nyerhet. Hogyan?

Megoldás

A kezdő az asztal szimmetria-középpontjába (a téglalap átlóinak a metszéspontjába) helyezi az első érméjét. Itt invariáns a középpont szerinti szimmetria: a kezdő játékos az ellenfele lépésére mindig a középpont szerint szimmetrikusan helyezi el a pénzérméit, így biztosan ő nyer. (Ugyanez a helyzet a kör, négyzet stb. alakú asztal esetén is.)

Most nézzünk egy különösen népszerű feladatot!

16. feladat

Egy szigeten 15 kaméleon él. Közülük 3 kék, 5 zöld és 7 piros. Ha két különböző színű kaméleon találkozik, akkor annyira megijed egymástól, hogy mindketten a harmadik színre változtatják a bőrüket. Két azonos színű kaméleon nem ijed meg egymástól, így találkozásukkor nem változtatják meg színüket. Lehetséges-e, hogy egy idő múlva csak azonos színű kaméleon él a szigeten?

Megoldás

Legyen rendre k, z és p a kék, zöld és a piros kaméleonok száma és $s = p - k$. A találkozások okozta változások során az s értékének hárommal való osztásakor a maradék nem változik, invariáns. Tehát a válasz: nem.

Nagyon gyakran, a feladatok egyszerű megfogalmazása ellenére, a célravezető invariáns megtalálása „kemény dió” lehet. Nézzük a következő feladatot!

17. feladat

A tisztáson 44 fa áll körvonalban. Mindegyik fán ül egy majom. Egy-egy perc elteltével valamelyik két majom átugrik a szomszédos fára, az egyik az óramutató járásával azonos, a másik ellentétes irányba. Lehetséges-e, hogy egy idő múlva mindegyik majom ugyanazon a fán ül?

Megoldás

Nem lehet. A fákat számozzuk valamelyik körüljárás szerint az 1, 2, …, 44 számokkal. Az i-edik fához rendeljük hozzá az $S_i := i \cdot a_i$ számot (minden $i \in \{1, 2, ..., 44\}$ esetén), ahol a_i az i-edik fán ülő majmok száma. Figyeljük meg az

$$S := S_1 + S_2 + ... + S_{44}$$

összeg változását. Az S értéke egy-egy alkalommal vagy nem, vagy 44-gyel változik, az 1. és 44. fák közti átugráskor. Kezdetben $S = 1 + 2 + ... + 44 = 22 \cdot 45$, az elérni kívánt állapotban $S = 44 \cdot k$ (ha a majmok mind a k-adik fán vannak). De ez nem érhető el, hiszen a $22 \cdot 45 + 44n$ szám nem osztható 44-gyel.

Utolsó feladatunk egy Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról származik.

18. feladat

Egy ötszög csúcsaira egész számokat írunk úgy, hogy a számok összege pozitív. Ha három egymás után következő csúcson az a, b és c szám szerepel, és $b < 0$, akkor a számokat kicserélhetjük rendre a következő számokkal: $a+b$, $-b$ és $c+b$. Bizonyítandó, hogy véges sok ilyen lépés után már csak nemnegatív számok lesznek az ötszög csúcsaira írva.

Megoldás

Legyenek eredetileg a_0, b_0, c_0, d_0 és e_0 az ötszög csúcsaira írt számok. Mivel $(a+b)+(-b)+(c+b) = a+b+c$, ezért az adott lépés a csúcsokra írt számok összegét nem változtatja. Tekintsük az

$S := (a-c)^2 + (b-d)^2 + (c-e)^2 + (d-a)^2 + (e-b)^2$ összeget.

Egy lépés után ez így változik:

$S' := (a-c)^2 + (-b-d)^2 + (c+b-e)^2 + (d-a-b)^2 + (e+b)^2$

Mivel $S' - S = -2b \cdot (a+b+c+d+e)$ és $b < 0$, valamint $a+b+c+d+e > 0$, ezért az S értéke minden lépésben csökken. Mivel az S értéke pozitív egész, így az eljárás véges számú lépés után véget ér.

A bemutatott témakörről még a [18] és [19]-ben is olvashatunk.