EMLÉKEZTETŐ ÁBRÁK A KÖRREL KAPCSOLATOS ISMÉTLÉSEKHEZ

Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

Célunk olyan (körrel kapcsolatos) fogalmak, tulajdonságok felidézése, átismétlése, kibővítése és rendszerezése, amelyekre bármely középiskolás tanulónak szüksége lehet.

Ismert tény, hogy a fogalmak - és általában az ismereteink - gondolatainkban nem izoláltan léteznek, hanem bonyolult, összefüggő rendszerek formájában. Ezért valamilyen fogalom közvetett módon is "előránthatό" a memóriából, vagyis egy felidézett fogalom maga után vonhatja más fogalmak megjelenését is.

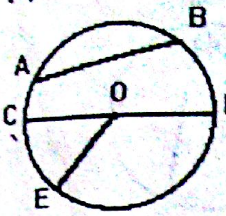
Éppen erre alapozva, célszerűnek találom olyan rajzok - ún. emlékeztető ábrák - készítését, amelyek rövid idő alatt, könnyűszerrel "előveszik" a memóriából a megfelelő fogalom lényeges ismérveit.

Jelen cikket főleg VII. osztályos tanulóknak ajánlom, de megjegyzem, hogy sikeresen tudtam használni a IX. osztályban is.

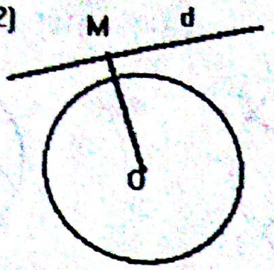
Remélem, hogy a jelen cikk sok hasznos ismeretet felfrissít és hozzájárul ezek elmélyítéséhez. Ezt a célt segítik a föltett kérdések is.

(A) *Fogalmak és viszonyok*

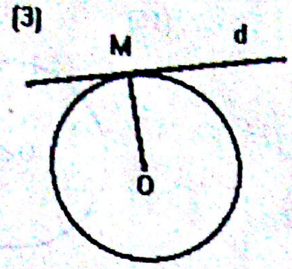
[1]



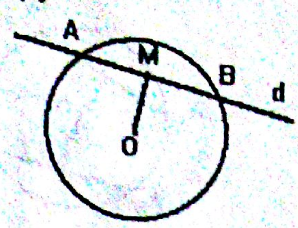
[2]



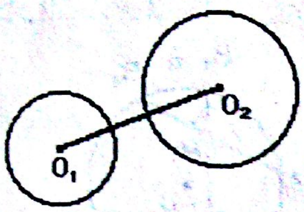
[3]



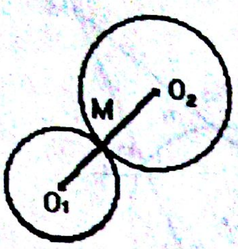
[4]



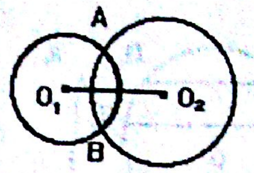
[5]



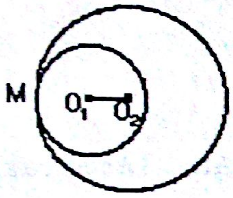
[6]



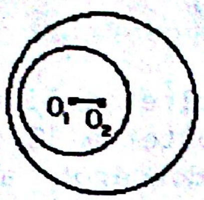
[7]



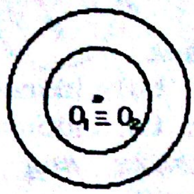
[8]



[9]



[10]

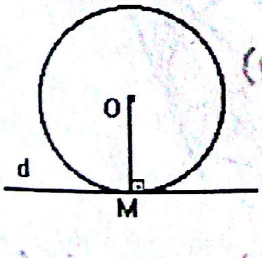


Kérdések

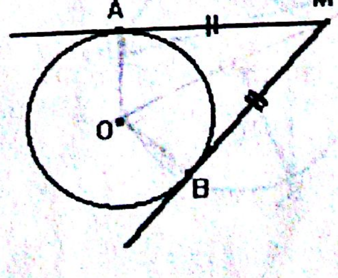
(1) Nevezzétek meg az 1. ábra *AB*, *CD* és *OD* fogalmait!
(2) Milyen viszonyt fejeznek ki a 2., 3., 4. ábra rajzai?
(3) Hogyan nevezik a 2., 3., 4. ábrák egyeneseit?
(4) Mit mondhatunk a 2., 3., 4. ábrákon látható OM szakasz hosszáról?
(5) Milyen viszonyt fejeznek ki az 5.-10. ábrák rajzai?
(6) Hogyan nevezik az 5.-10. ábrákon látható köröket?
(7) Hogyan nevezik az 5.-10 ábrákon látható O_1O_2 szakaszt?
(8) Mit mondhatunk az 5.-10. ábrákon látható O_1O_2 szakasz hosszáról?

(B) *Fogalmak és alaptulajdonságok*

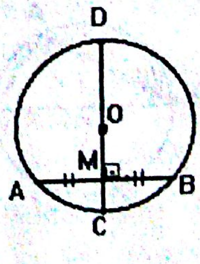
[11]



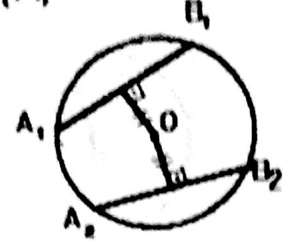
[12]



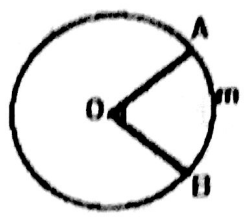
[13]



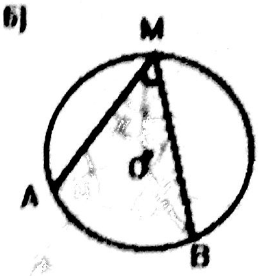
[14]



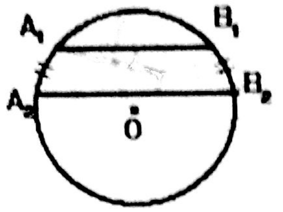
[15]



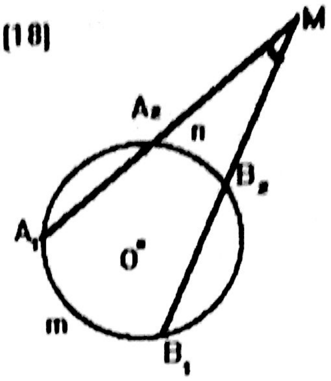
[16]



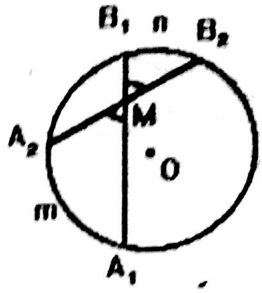
[17]



[18]



[19]



Kérdések

(1) Milyen tulajdonságot szemléltet a 11. ábra?

(2) Milyen tulajdonságot szemléltet a 12. ábra?

(3) Fogalmazz meg egy tulajdonságot a 13. ábrán látottakkal kapcsolatban!

(4) Fogalmazd meg az előbbi tulajdonság fordítottját is!

(5) Fogalmazz meg egy tulajdonságot a 14. ábrán látottakkal kapcsolatban!

(6) Fogalmazd meg az előbbi tulajdonság fordítottját is!

(7) Nevezzük meg a 15., 16., 18., 19. ábrákon látható szögeket!

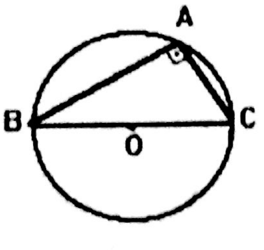
(8) Mit mondhatunk a 15., 16., 18., 19. ábrákon látható szögek mértékéről?

(9) Jelentsd ki azt a tulajdonságot, amelyet a 17. ábra szemléltet!

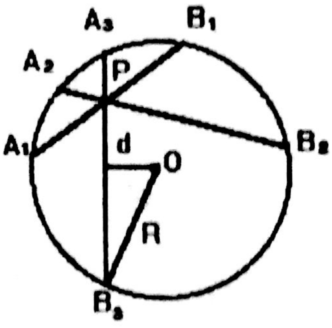
A fent megfogalmazott tulajdonságokat próbáld bizonyítani is!

(C) *Fogalmak és fontosabb tulajdonságok*

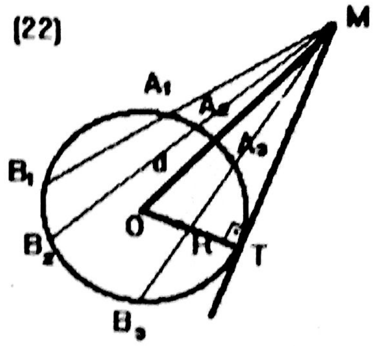
[20]



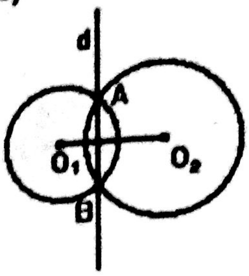
[21]



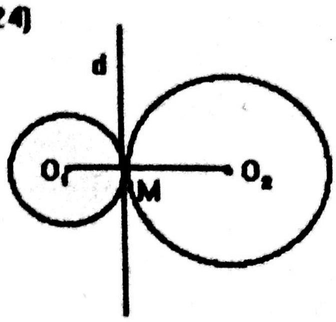
[22]



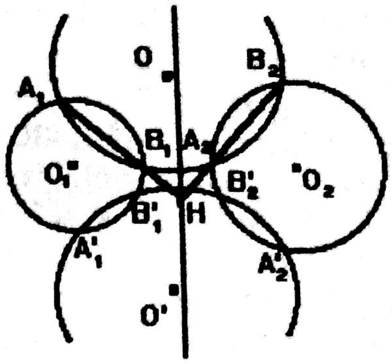
(23)



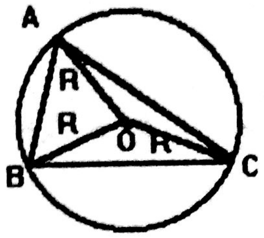
(24)



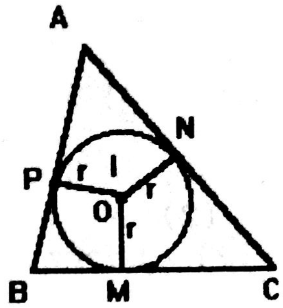
(25)



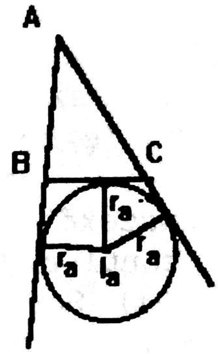
(26)



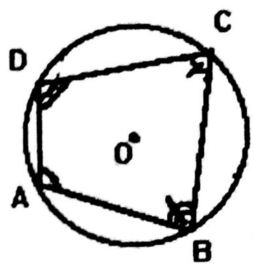
(27)



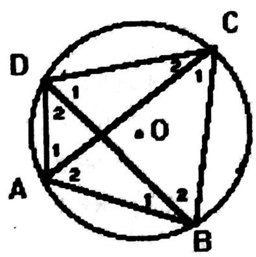
(28)



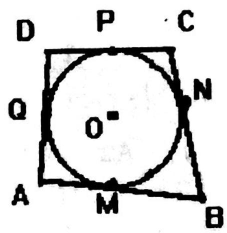
(29)



(30)



(31)



Kérdések

(1) Milyen tulajdonság kapcsolódik a 20. ábra rajzához?

(2) Milyen eredményeket ismersz a 21. és 22. ábrákhoz kapcsolódóan?

(3) Hogy nevezik a 23., 24., 25. ábrákon látható *d* egyenest?

(4) Milyen tulajdonségokkal rendelkeznek a 23., 24., 25. ábrák *d* egyenesei?

(5) Hogyan nevezik a 25. ábra *H* pontját? Hogyan szerkesszük meg? Hát a *d*-t?

(6) Hogyan nevezik a 26. ábrán látható *R* sugarú kört? Hol a középpontja? Milyen képletet ismersz az *R* kiszámítására?

(7) Mi a neve a 27. ábrán látható *r* sugarú körnek? Hol a kör középpontja? Milyen képletet ismersz az *r* kiszámítására?

(8) Hogyan nevezik a 28. ábrán látható r_a sugarú kört? Hol a kör középpontja? Milyen képletet ismersz az r_a kiszámítására?

(9) Hogyan nevezik a 29. ábrán látható négyszöget?

(10) Milyen tulajdonsággal rendelkeznek a fenti négyszög szögei?

(11) Milyen fordított tulajdonságot ismersz az előbbi állításról?
(12) Hol van a 29. ábrán látható kör középpontja?
(13) Milyen szükséges és elégséges körbeírhatósági feltételt ismersz még? (Nézd a 30. ábrát!)
(14) Milyen körbeírhatósági tételek fűződnek PTOLEMÁJOSZ nevéhez?
(15) Hogyan nevezik a 31. ábrán látható $ABCD$ négyszöget?
(16) Milyen tulajdonságokkal rendelkeznek az előbbi négyszög oldalai? Igaz-e ennek a tulajdonságnak a fordítottja?
(17) Hol található a 31. ábrán látható kör középpontja?

Próbáld bizonyítani is a fent elhangzott tulajdonságokat!

(E) *Feleletek*

(A).(1) AB húr, olyan szakasz, amely a kör két különböző pontját köti össze; CD átmérő, olyan húr, amely áthalad a kör középpontján (leghosszabb húr); OE sugár, az átmérő hosszának a felével egyenlő, a kör középpontját a kör egy tetszőleges pontjával összekötő szakasz. (2) Az egyenes és a kör kölcsönös helyzetét tanulmányozzák. (3) Sorra: külső, érintő, metsző egyenesek. (4) Sorra: $OM>R$, $OM=R$, $OM<R$. (5) Két kör kölcsönös helyzetét vizsgálják. (6) Sorra: külső, érintő, metsző, belső érintő, belső, koncentrikus körök. (7) Az O_1O_2 szakaszt centrálisnak nevezik. (8) Rendre $O_1O_2>R_1+R_2$, $O_1O_2=R_1+R_2$, $O_1O_2<R_1+R_2$ (ha $R_1\leq R_2$, akkor $R_2<O_1O_2+R_1$), $R_2=O_1O_2+R_1$, $O_1O_2<|R_2-R_1|$, $O_1O_2=0$ (zéró).

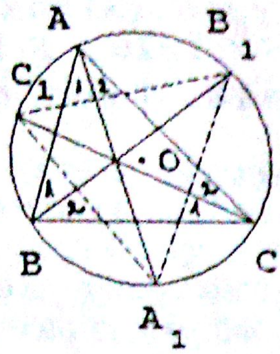
(B).(1) Az érintő merőleges az érintési pontban húzott sugárra. (2) Külső pontból húzott két érintő kongruens. (3) Egy húrra merőleges átmérő felezi a húrt. (4) Ha egy átmérő felezi a húrt, akkor merőleges rá. (5) Egyenlő hosszúságú húrok a kör középpontjától egyenlő távolságra vannak. (6) Ha két húr a kör középpontjától egyenlő távolságra van, akkor kongruensek. (7) Középponti, kerületi, belső és külső szögek. (8) Rendre: $\widehat{AOB}=AmB$, $\widehat{AMB}=\frac{1}{2}AmB$, $A_1\widehat{M}B_1=\frac{1}{2}(A_1mB_1-A_2nB_2)$, $A_1\widehat{M}A_2=\frac{1}{2}(A_1mA_2+B_1nB_2)$. (9) Párhuzamos húrok által közrezárt körívek kongruensek.

(C).(1) A félkörbe írt háromszög derékszögű, és fordítva. (2) Belső, illetve külső pontnak a körre vonatkozó hatványa: $A_1P\cdot PB_1=A_2P\cdot PB_2=\ldots$ állandó; ezt az állandót a P pont körre vonatkozó hatványának nevezik, ρ-val jelölik és $\rho=d^2-R^2$, ahol pl. $d=d(O,A_3B_3)$. (3) Hatványtengely. (4) A két körre vonatkozóan egyenlő hatvánnyal rendelkező síkbeli pontok mértani helye. (5) H=hatványközéppont, $H=A_1B_1\cap A_2B_2$, $K=A'_1B'_1\cap A'_2B'_2$, $d=HK$, ugyanakkor d merőleges az O_1O_2 centrálisra. (6) A háromszög köré írt kör, középpontja az oldalfelező merőlegesek O metszéspontjában található, $R=abc/4T$, ahol $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$, T az ABC_Δ területe. (7) A háromszögbe írt kör, középpontja a belső szögfelezők I

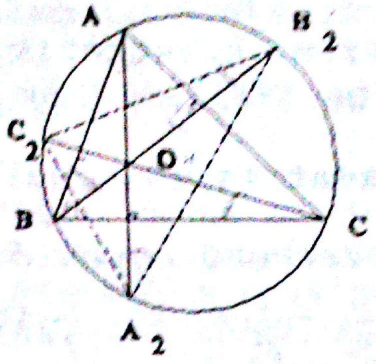
metszéspontjában található, $r=T/p$, ahol $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ a félkerület. (8) A háromszög BC oldalához írt kör, középpontja az A szög belső, illetve a B és C szögek külső szögfelezőinek I_a metszéspontjában található. $r_a=T:(p-a)$. (9) Körbeírható vagy húrnégyszög. (10)-(11) $\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}$ $\Leftrightarrow$ $ABCD$ körbeírható. (12) A négy oldal oldalfelező merőlegesének a metszéspontjában. (13) $ABCD$ körbeírható $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\hat{A}_1=\hat{B}_2$, $\hat{A}_2=\hat{D}_1$, $\hat{B}_1=\hat{C}_2$, $\hat{C}_1=\hat{D}_2$. (14) Ptolemájosz első két tétele: $ABCD$ körbeírható $\Leftrightarrow$ $AC\cdot BD = AB\cdot CD+AD\cdot BC$, illetve $AC:BD = (AB\cdot AD+BC\cdot BD):(AB\cdot BC+AD\cdot DC)$ (15) Kör köré írt négyszög. (16) $ABCD$ kör köré írható $\Leftrightarrow$ $AD+BC=AB+CD$. (17) Az A, B, C, D szögek belső szögfelezőinek a metszéspontjában.

Az említett tulajdonságok bizonyítása a tankönyvekben is megtalálható.

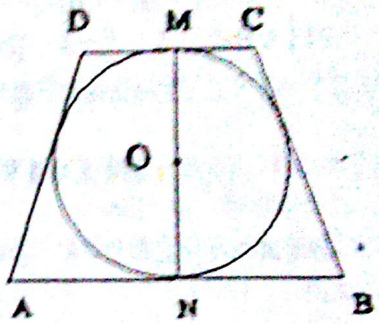
(A 6/1992. számban megjelent cikk folytatása - **Tuzson Zoltán** tanár összeállítása)



(1)



(2)

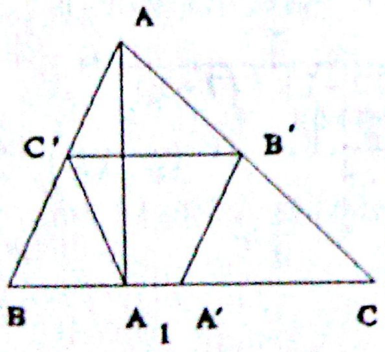


(3)

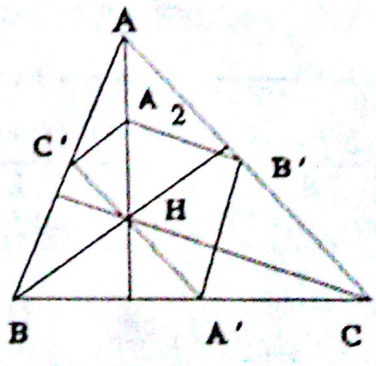
(1) Ha $\hat{A}_1=\hat{A}_2$, $\hat{B}_1=\hat{B}_2$, $\hat{C}_1=\hat{C}_2$, számítsuk ki az $A_1B_1C_1\Delta$ szögeit az $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ függvényében.

(2) Ha $AA_2\perp BC$, $BB_2\perp AC$, $CC_2\perp AB$, számítsuk ki az $A_2B_2C_2\Delta$ szögeit az $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ függvényében.

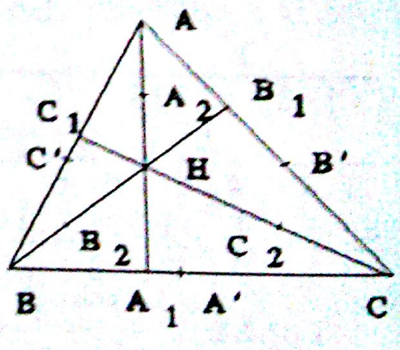
(3) Ha $AB\parallel CD$ és $AD\equiv BC$, igazold: $MN=\sqrt{AB.CD}$.



(4)



(5)

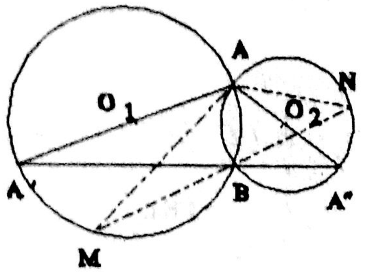


(6)

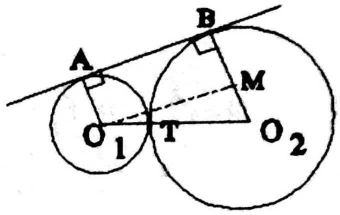
(4) Ha $AA_1 \perp BC$ és A', B', C' oldalfelező pontok, akkor az $A_1A'B'C'$ négyszög körbeírható.

(5) Ha H ortocentrum, A', B', C' oldalfelező pontok és $AA_2=A_2H$, igazoljuk, hogy az $A_1B'A_2C'$ négyszög körbeírható.

(6) Az előbbi feladat jelöléseit használva, igazoljuk, hogy A', B', C', A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 konciklikusak.



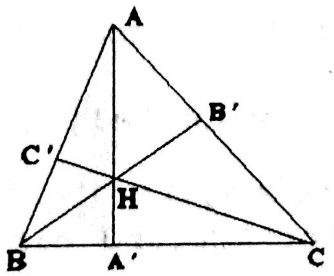
(7)



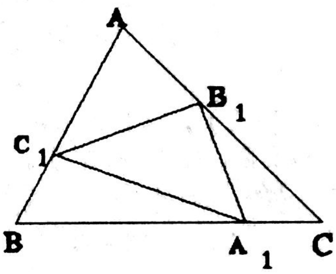
(8)

(7) a) Ha AA', AA'' átmérők, akkor A', B, A'' kollineárisak.
b) Ha M tetszőleges változó pont és M, B, N kollineárisak, akkor $M\hat{A}N$ állandó.

(8) Ha T érintési pont, AB érintő, akkor $AB=\sqrt{D_1 \cdot D_2}$, ahol: $D_1=2O_1A$, $D_2=2O_2B$.



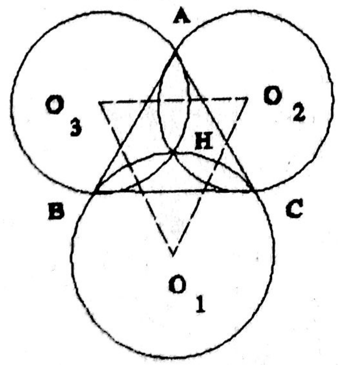
(9)



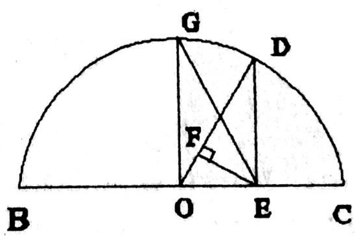
(10)

(9) Ha $AA' \perp BC$, $BB' \perp CA$, $CC' \perp AB$, akkor a következő négyszögek körbeírhatók: a) $A'HC'B$, $B'HA'C$, $C'HB'A$; b) $B'C'BC$, $A'B'AB$, $C'A'CA$.

(10) Ha A_1, B_1, C_1 tetszőleges belső pontok, akkor az AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1 háromszögek köré írt körök egy pontban találkoznak.



(11)



(12)

(11) Ha az O_1, O_2, O_3 középpontú körök egyenlő sugarúak és H mindhárom körnek a metszéspontja, akkor az $ABC\triangle$ köré írt kör sugara az eredeti körök sugarával egyenlő.

(12) Ha $BO=OC=OG$, $BE=a$, $EC=b$, $OE=\frac{a-b}{2}$, $DE\parallel OG$, $EF\perp OD$, igazoljuk, hogy: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Útmutatások a feladatok megoldásához.

(1) $C_1\hat{A}_1A=C_1\hat{C}A=\frac{\hat{A}}{2}$, $B_1\hat{A}_1A=B_1\hat{B}A=\frac{\hat{B}}{2}$ $\Rightarrow$ $C_1\hat{A}_1B_1=\frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{B})$ és analógjai.

(2) $C_2\hat{A}_2A=C_2\hat{C}A=90°-\hat{A}$, $B_2\hat{A}_2A=B_2\hat{B}A=90°-\hat{A}$ $\Rightarrow$ $B_2\hat{A}_2C_2=180°-2\hat{A}$ és analógjai.

(3) Legyen $CP\parallel MN$ ($P\in AB$), alkalmazzuk Pitagorász tételét a $CPB\Delta$ -ben.

(4) $B'C'$, $A'B'$ középvonalak, $A'B'=A_1C'=BC'=C'A$; $A'B'C'A_1$ egyenlő szárú trapéz.

(5) $A_2\hat{C}'A'=A_2\hat{B}'A'=90°$, $A_2C'\parallel BH$, $A_2B'\parallel CH$.

(6) A (4) és (5) feladatokat alkalmazzuk 3-3 esetben (Euler kör).

(7) $A\hat{B}A'=A\hat{B}A''=90°$, $A\hat{M}B=A\hat{A}'B$, $A\hat{N}B=A\hat{A}''B$.

(8) Legyen $O_1M\perp O_2M$ ($M\in BO_2$); alkalmazzuk Pitagorász tételét az $O_1MO_2\Delta$ -ben.

(9) A (11), (12), illetve (14) tulajdonságok teljesülnek (lásd az ML 6/92.számát).

(10) Legyen $M=C(AB_1C_1)\cap C(BA_1C_1)$ így MB_1AC_1, MA_1BC_1 körbeírhatók $\Rightarrow$ MA_1CB_1 körbeírható (az M pontot Brocard első pontjának nevezik).

11) O_3AO_2H, O_1BO_3H rombuszok, ABO_1O_2 paralelogramma, $ABC\Delta\equiv O_1O_2O_3\Delta$, $HO_1=HO_2=HO_3=R$ (ún. Ţiţeica 5-lejes pénzérme feladata).

12) Könnyen belátható, hogy $GE\geq OG\equiv OD\geq ED\geq DF$.