SKATULYA-ELV

Sava Grozdev

Ha 3 apró labdát akarunk elhelyezni a nadrágunk 2 zsebébe, akkor kétség sem férhet hozzá, hogy legalább 2 labda azonos zsebbe fog kerülni. Hasonlóan, ha 4 kicsi dobozt akarunk elhelyezni az íróasztalunk 3 fiókjába, sehogyan sem érhető el, hogy minden fiókba legfeljebb 1 doboz kerüljön. Természetesen az egyik fiók legalább 2 dobozt fog tartalmazni. 5 papagáj vagy 5 nyúl 4 ketrecbe történő elhelyezése esetén a tulajdonos találkozni fog egy olyan ketreccel, amiben legalább 2 papagáj vagy 2 nyúl lesz.

Ezek az nyilvánvaló megfigyelések adják egy alapvető szabály, azaz elv alapját, ami szerint: **ha *m* testet szétosztunk *n* csoportba és *m* > *n*, akkor legalább két test azonos csoportba fog kerülni.**

Ezt az elvet különböző országokban különbözőképpen nevezik. Például Franciaországban úgy ismerik, mint a “fiókok elvét”, Angliában mint a “galambdúcok elvét” míg Bulgáriában és Oroszországban mint Dirichlet-elvet. Az elv a nagy német matematikussal, *Gustav Lejeune-Dirichlet-vel* (1805 – 1859) áll kapcsolatban, bár már előtte is jól ismerték az elvet. Dirichlet érdeme nem az előbbi egyszerű tény felfedezése volt, hanem az alkalmazása számos érdekes probléma megoldásában a számelmélet terén. Dirichlet maga nem költöztetett papagájokat vagy nyulakat ketrecekbe és nem osztott szét dobozokat fiókokba.

A “fiókok nyelvét” használva, a skatulya-elv kimutatja egy bizonyos tulajdonságokkal rendelkező fiók létezését. Így ez tulajdonképpen a létezés bizonyítása. Azonban ez az elv nem ad egy algoritmust arra, hogy meg is találjuk a kívánt fiókot, és következésképpen nem konstruktív tulajdonságú. Ugyanis, a létezés konstruktív bizonyítása közelebb áll a gondolkodáshoz és meggyőzőbb. Úgy tűnik, hogy ez a legfőbb oka annak, hogy a skatulya-elv számos alkalmazása váratlannak látszik. A következő feladatok ilyen alkalmazásokhoz tartoznak.

1. feladat. Egy iskolába 367 diák jár. Mutassuk meg, hogy van legalább két diák, akik azonos napon ünneplik a születésnapjukat!
Megoldás: Jelöljük az év minden napját egy fiókkal! Mivel minden évben 365 vagy 366 nap van attól függően hogy normális vagy szökőév, így a fiókok száma legfeljebb 366. Rakjunk minden diákot a születésnapjának megfelelő fiókba! Így a megoldás következik a skatulya-elvből.

2. feladat. Az anatómiából ismert, hogy egy embernek kevesebb, mint 200 000 hajszála van. Bizonyítsuk be, hogy él legalább két ember Szófiában, akiknek ugyanannyi hajszáluk van!
Megoldás: Gondoljunk most 200 000 fiókra, amik 1-től 200000-ig vannak számozva. Szófia minden egyes lakosát beletesszük egy fiókba aszerint, hogy mennyi hajszála van. Mivel Szófiának több lakosa van, mint ahány fiókunk van, a skatulya-elvből következik, hogy legalább két lakos ugyanabba a fiókba kerül. Azaz ugyanannyi hajszál van a fejükön.
Hasonló kijelentés tehető a világ összes többi olyan fővárosára, aminek több mint 200 000 lakosa van.

3. feladat. Egy diáknak 9 feladatot kell megoldania egy hét alatt. Magyarázzuk meg, miért igaz, hogy a diáknak legalább az egyik napon nem kevesebb mint 2 feladatot kell megoldania!
Megoldás: A hét minden napjához hozzárendelük egy fiókot. A fiókok száma így összesen 7. Válasszuk ki bármelyik fiókot! Amit bele kell tennünk, az az a probléma, amit a diák az adott fiókhoz rendelt napon oldott meg. Ugyanígy végigmegyünk az összes többi fiókon is és

alkalmazzuk a skatulya-elvet. Ez elegendő a magyarázathoz. Az eredmény hasonló ha a feladatok száma 8, 10 vagy több.

4. feladat. Adott 4 természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy közülük legalább kettő azonos maradékot ad 3-mal osztva!
Megoldás: A lehetséges maradékok 3-mal történő osztás esetén 0, 1 és 2. Tekintsünk 3 fiókot, amik hozzá vannak rendelve a különböző maradékokhoz. Tegyük a 4 természetes számot a fiókokba a maradékaik szerint. Így a megoldás következik a skatulya-elv alapján.

5. feladat. Adott 5 természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy a számok közti különbségek közül legalább egy osztható 4-gyel!
Megoldás: A lehetséges maradékok 4-gyel való osztás esetén 0, 1, 2 és 3. Mint az előző feladatban is, tekintsünk 4 fiókot, hozzárendelve egy-egy osztási maradékhoz. A skatulya-elvből következik, hogy legalább 2 szám ugyanabba a fiókba fog kerülni. Mivel ezek 4-gyel való osztási maradéka megegyezik, a különbségük osztható lesz 4-gyel és így kész is a megoldás.

A következő tétel hasonlóképpen bizonyítható mint az előző feladat:

Tétel. Ha n egy természetes szám, akkor tetszőleges $n + 1$ természetes szám közül kiválasztható kettő úgy, hogy a különbségük osztható legyen n-nel.

6. feladat. Legyen a, b és c három egész szám! Bizonyítsuk be, hogy az

$$abc(b - a)(c - a)(c - b)$$

szorzat osztható 6-tal!
Megoldás: A szorzat utolsó három tényezője a három számból minden lehetséges módon kiválasztható párok különbsége. A három egész szám közül legalább kettő azonos paritású, ezért a különbségek egyike biztosan páros, azaz a szorzat osztható 2-vel. Továbbá, ha legalább az egyik egész szám osztható 3-mal, a szorzat is osztható 3-mal, ellenkező esetben (ha egyik szám sem osztható hárommal) lesz két olyan szám, amelyek 3-mal osztva azonos (1-es vagy 2-es) maradékot adnak, és így a különbségük lesz osztható 3-mal.

7. feladat. Hat osztálytárs részt vesz a "találjuk el a célt" versenyben. Mutassuk meg, hogy közülük legalább kettőnek azonos számú találata van, ha a találatok száma összesen 14.
Megoldás: Az összes olyan diákot, akinek 0 találata van, egy 0-ás címkéjű fiókba tesszük, az összes olyan diákot, akinek 1 találata van, egy 1-es címkéjű fiókba tesszük és így tovább, minden diákot, akinek 14 találata van, egy 14-es címkéjű fiókba teszünk. Ha minden diák különböző fiókba esik, akkor az összes találatok száma nem kevesebb, mint $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Ez ellentmond annak a feltételnek, hogy a találatok száma 14. Következésképpen legalább két osztálytársnak azonos számú találata kell legyen.

8. feladat. Hét ember egyszerre vásárol egy boltban. Bizonyítsuk be, hogy közülük legalább kettőnek azonos számú ismerősük van többiek közül!
Megoldás: Legelső észrevételünk, hogy minden ismeretség szimmetrikus, azaz ha A ismeri B-t, akkor B is ismeri A-t. A matematikában ezt a tulajdonságot **reflexivitásnak** hívják. Minden embernek 0, 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 ismerőse van a többiek közül a boltban. De ha van egy ember 0 ismerőssel, azaz senkit sem ismer a boltban, akkor a reflexivitás miatt nem lehet senkinek sem 6 ismerőse a boltban. Így az ismerősök számától függően minden ember 6 csoportba osztható be, azaz 6 fiókba helyezhető el. Két eset lehetséges, tekintsük a csoportokat egy lehetséges rendezés, az ismerősök számának a növekvő sorrendje szerint. Az első esetben a 0 ismerőssel rendelkező emberek esnek az első csoportba, az 1 ismerőssel rendelkező emberek esnek a második csoportba, és így tovább 2 ismerős - a harmadik csoport, 3 ismerős - a negyedik csoport, 4 ismerős – az ötödik csoport, és 5 ismerős - a hatodik csoport. A második esetben az 1 ismerőssel rendelkező emberek esnek

az első csoportba, 2 ismerőssel rendelkező emberek esnek a második csoportba, és így tovább, 3 ismerős – harmadik csoport, 4 ismerős – negyedik csoport, 5 ismerős – ötödik csoport, és 6 ismerős – a hatodik csoport.
Mindkét esetben a csoportok száma 6, míg a vásárlók száma 7. Így a megoldás következik a skatulya-elvből.

Ebben a feladatban felhasználtuk azt a megállapodást, hogyha két embernek nincsen ismerőse, akkor azonos számú ismerősük van. Alkalmazva a megoldás ötletét bizonyítható, hogy Szófiában (vagy a világ bármely más fővárosában) van legalább két lakos, akiknek azonos számú ismerősük van a szófiai lakosok közt.

A fenti probléma egy egyedi esete az úgy nevezett “ismerősök problémának”, ami szerint: Minden n emberből álló csoportban esetén létezik legalább két ember, akiknek azonos számú ismerősük van a többiek között a csoportban.

9. feladat. Tizenhat csapat játszik egy futball versenyen, ahol mindenki játszik mindenki ellen. Bizonyítsuk be, hogy minden meccs után van legalább két csapat, akik ugyanannyi meccset játszottak.
Megoldás: Az előző problémához hasonló módon elegendő észrevenni, hogy amennyiben van egy csapat, aki 0 meccset játszott, akkor nem lehet olyan csapat, aki 15 meccset játszott. Ebből következik, hogy 15 fiókot tekinthetünk, a meccsek száma szerint. Ezután már elegendő használni a skatulya-elvet. Mint az előző feladatnál is, a résztvevő csapatok száma itt sem fontos.

10. feladat. Adott egy 5 × 5-ös négyzet, ami 25 egységnégyzetre van osztva. Tetszőleges módon 26 pont van bejelölve a négyzeten. Mutassuk meg, hogy legalább két pont azonos egységnégyzetre fog esni!
Megoldás: Ebben a feladatban az egységnégyzetek szolgálnak fiókokként. Ha minden fiókban legfeljebb egy pont van, akkor összesen legfeljebb 1 × 25 = 25 pont van. De a pontok száma 26 és 26 > 25. Így a megoldás következik a skatulya-elvből.

11.feladat. 50 pont van bejelölve egy 7 cm oldalhosszúságú négyzeten. Bizonyítsuk be, hogy a pontok közül legalább 2 lefedhető egy 1 cm oldalhosszúságú négyzettel!
Megoldás: Osszuk fel az eredeti négyzetet 49 darab 1 cm oldalhosszúságú négyzetre! Ez már visszavezethető az előző feladatra, azaz legalább két pont az egyik 1 cm oldalhosszúságú négyzetbe fog esni. Így egy négyzet lefedi a két pontot.

12. feladat. 101 pont van elhelyezve egy 10 cm oldalhosszúságú négyzeten. Bizonyítsuk be, hogy van két olyan pont, amelyek távolsága kevesebb, mint 2 cm!
Megoldás: Kihasználhatjuk, hogy a négyzet egymástól legtávolabb lévő pontjai az átfogók végei. Az átfogó végei és a többi csúcs egyike együtt egy egyenlőszárú háromszöget határoznak meg, aminek a befogói egyenlők a négyzet oldalaival. Ebből következik, hogy az átfogó hossza kisebb, mint a négyzet oldalának kétszerese. Mivel az átfogó végei a négyzet egymástól legtávolabb lévő pontjai, ezért a négyzet bármely két pontjának távolsága szintén kisebb, mint a négyzet oldalának kétszerese. Továbbá, mint az előző feladatban, felosztjuk a megadott négyzetet 100 kisebb, 1 cm oldalhosszúságú négyzetre. Így most a 100 kisebb négyzet lesz a 100 fiók, és így a skatulya-elvből következik, hogy legalább két pont egy kis négyzetbe fog esni. Tekintsünk két ilyen pontot. Mint már korábban is észrevettük, a köztük lévő távolság kisebb lesz, mint a kis négyzet oldalának kétszerese, azaz kisebb, mint 2 cm.

13. feladat. Adott 7 pont egy 16 egység-négyzetből álló négyzeten. Bizonyítsuk be, hogy vagy van olyan 4 egység-négyzetből álló négyzet, ami 3 pontot tartalmaz legalább, vagy van olyan 3, összesen 12 egység-négyzetből álló négyzet, úgy hogy mindegyik 4 egység-négyzetből áll és mindegyik legalább 2 pontot tartalmaz.

Megoldás: Osszuk fel az eredeti négyzetet 4 darab 2×2-es négyzetre! Ez a 4 négyzet fog most fiókként szolgálni. A skatulya-elv szerint legalább az egyikük nem kevesebb, mint 2 pontot tartalmaz. Ha több mint 2 pontot tartalmaz, akkor készen vagyunk. Legyen a pontok száma pontosan 2! A visszamaradó 5 pont a másik 3 darab 2×2-es négyzetben helyezkedik el. A skatulya-elv szerint megint legalább az egyikük nem kevesebb, mint 2 pontot tartalmaz. Ha több mint 2 pontot tartalmaz, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben a pontok száma pontosan 2. Így 2 darab 2×2-es négyzetünk van, és mindegyik 2 pontot tartalmaz. A visszamaradó 3 pont a maradék 2 darab 2×2-es négyzetben helyezkedik el. Használjuk a skatulya-elvet harmadszorra is! Így következik, hogy a négyzetek egyike nem kevesebb, mint 2 pontot tartalmaz. Ha a pontok száma 3, készen vagyunk. Ha a pontok száma 2, akkor megkaptuk a harmadik 2×2-es négyzetet is, ami 2 pontot tartalmaz.

14. feladat. Adott egy 3×3-as, 9 egység-négyzetből álló négyzet. Minden egység-négyzetbe a következő számok egyikét írjuk: -1, 0, vagy 1. Bizonyítsuk be, hogy a sorok, oszlopok és átlók összegei között van két egyenlő!
Megoldás: A sorok száma 3, az oszlopok száma szintén 3, és az átlók száma 2. Így összesen 8 összegünk van. Másrészről a -1, 0, 1 számokból képezhető lehetséges összegek száma 7. A lehetséges összegek: -3, -2, -1, 0, 1, 2 vagy 3. Tekintsünk 7, egy-egy lehetséges összegnek megfelelő fiókot! A skatulya-elvből következik, hogy a sorok, oszlopok és átlók összesen 8 összegei közül legalább 2 egyenlő.

15. feladat. Egy falánk ember 10 édességet evett meg egy cukros dobozból, amiben 3-féle édesség van. Találjuk meg n legnagyobb lehetséges értékét, amiről biztosan állítható, hogy a falánk ember legalább n édességet evett meg az azonos fajtából.
Megoldás: Ha a falánk ember legfeljebb 3 édességet evett meg az azonos fajtájúakból, akkor a megevett édességek száma összesen legfeljebb $3 \cdot 3 = 9$. Ez ellentmondás, mivel $9 < 10$. Következésképpen $n > 3$ és a legkisebb lehetséges érték $n = 4$. A fiókok ebben az esetben a különböző fajtájú édességek, azaz 3 darab fiók van. Ha 10 édességet teszünk 3 fiókba, akkor azt kapjuk, hogy legalább egy fiókban nem kevesebb, mint 4 édesség lesz.

Az előző feladat megoldásában a skatulya-elv következő, általánosabb formáját használtuk ki: **ha *m* testet osztunk szét *n* csoportba, és *m* > *nk*, ahol *k* egy természetes szám, akkor legalább *k* + 1 test fog kerülni az egyik csoportba.**
A teljesség kedvéért be fogjuk bizonyítani a skatulya-elvnek ezt a sokkal általánosabb formáját is, bár a bizonyítás olyan egyszerű, mint a skatulya-elv maga. A bizonyítás tanulságos is, hiszen az ellentmondáson alapuló hasonló indoklást gyakran alkalmazunk. Tegyük fel, hogy legfeljebb k test kerül egy csoportba! Így az összes test száma legfeljebb nk-val egyenlő, ami ellentmond annak a feltételnek, hogy a tárgyak száma meghaladja nk-t. Így készen is vagyunk! Vegyünk észre egy másik tanulságos részletet is! Ez k pontos meghatározásával kapcsolatos. Tulajdonképpen elég elosztani m-et, a tárgyak számát n-nel, a csoportok számával. A legtöbb esetben a hányados egy tört, de elég venni a legkisebb olyan egész számot, ami nagyobb a hányadosnál. Így, ha 7 nyulat kell szétosztani 3 ketrecbe, osszuk el 7-et 3-mal, és így a hányados $\frac{7}{3}$. A legkisebb egész szám, ami nagyobb $\frac{7}{3}$-nál a 3. Ebben az esetben a skatulya-elv az állítja, hogy az egyik ketrecben legalább 3 nyúl lesz.

16. feladat. Egy osztályban 25 diák tanul. Bizonyítsuk be, hogy közülük legalább 3 ugyanabban a hónapban született!
Megoldás: Tekintsünk 12 fiókot, azaz annyit, amennyi hónap van egy évben. Tegyük a diákokat a születési hónapok szerint a fiókokba! Aztán, mivel $m = 25 > 12 \cdot 2$, a skatulya-elvből következik, hogy az egyik fiókban legalább $2 + 1 = 3$ diák van (ebben az esetben $n = 12$ és $k = 2$).

17. feladat. 40 diák versenyzik 6 feladat megoldásán egy kétnapos matematikai olimpián. Bizonyítsuk be, hogy közülük legalább hat ugyanannyi feladatot oldott meg!
Megoldás: Tekintsünk 7 fiókot! Tegyük az elsőbe azokat a diákokat, akik egy feladatot sem oldottak meg, tegyük a másodikba azokat, akik egy feladatot oldottak meg, tegyük a harmadikba azokat, akik két feladatot oldottak meg, és így tovább, tegyük a hetedikbe azokat, akik hat feladatot oldottak meg! Eszerint $m = 40 > 7 \cdot 5 = 35$ és ebből a skatulya-elv szerint következik, hogy lesz olyan fiók, amibe 6 diák kerül.

18. feladat. Egy kerületben 123 ember lakik. Életkoraik összege években 3813. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható a kerületből 100 lakos úgy, hogy életkoraik összege nem kevesebb mint 3100!
Megoldás: Rendezzük a lakosokat életkoruk szerint sorrendbe, és válasszuk ki a 100 legidősebbet! Közülük a legfiatalabb sem fiatalabb, mint visszamaradó 23 lakos bármelyike. Be fogjuk bizonyítani, hogy a 100 legidősebb lakos életkorának összege nem lehet kevesebb 3100-nál. Az állítás tagadásából - azaz az életkoruk összege kevesebb, mint 3100 év - az következik, hogy a 100 legidősebb lakos közül a legfiatalabb életkora 31 év alatt van tekintve, hogy $31 \cdot 100 = 3100$. Ez szintén igaz a maradék 23 lakosra is. Így a 23 lakos összéletkora kevesebb, mint $23 \times 31 = 713$ év. Következésképpen a 123 lakos életkorának összege kevesebb, mint $713 + 3100 = 3813$ év és ez egy ellentmondás. Vegyük észre, hogy a 100 legidősebb lakos életkorának összege akkor 3100, ha mindegyikük pontosan 31 éves.

19. feladat. Adott 6 ház amelyek közül bármely 2 egy úttal van összekötve, ami vagy aszfaltozott vagy kővel burkolt. Bizonyítsuk be, hogy van legalább 3 olyan ház, amelyek közül bármelyik bármelyik másikkal azonos típusú úttal van összekötve!
Megoldás: Jelöljük a házakat *A*, *B*, *C*, *D*, *E* és *F* betűkkel! A-ból öt út indul ki, így következik a skatulya-elvből, hogy közülük legalább három azonos típusú, például aszfaltozott. Tegyük fel, hogy ez a három út *A* és *B*, *A* és *C*, valamint *A* és *D* között van! Az utakat magukat *AB*-vel, *AC*-vel, *AD*-vel jelöljük a végpontjaik szerint. Vizsgáljuk meg azt az esetet, mikor *BC* út kövezett. Ellenkező esetben ugyanis azok az utak, amelyek *A*, *B*, *C* házakat kötik össze, mind aszfaltozottak, és így ez esetben készen is vagyunk. Hasonló módon vizsgáljuk azt esetet, mikor *BD* és *CD* utak is kövezettek. De ekkor *B*, *C* és *D* házak kövezett utakkal vannak összekötve, és így készen is vagyunk.

Az előző feladat egyenértékű megfogalmazása a következő: Adott 6 pont a síkon úgy, hogy semelyik három sem esik egy egyenesbe. A pontokat összekötő szakaszokat mind kékre vagy pirosra festjük. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan háromszög, amelynek csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki, és egyszínű (azaz minden éle ugyanolyan színű).

20. feladat. Adott 17 pont a síkon úgy, hogy semelyik három sem esik közülük egy egyenesre. Azok a szakaszok, amelyek ezeket a pontokat kötik össze, kék, piros, vagy zöld színűek. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan háromszög, amelynek csúcsai a megadott pontok közül kerülnek ki, és a háromszög egyszínű.
Megoldás: Válasszuk ki az egyik pontot és jelöljük el *A*-val! Most tekintsük a 16 szakaszt, ami *A*-ból indul! A skatulya-elvből következik, hogy közülük legalább 6 azonos színű, például kék (ha legfeljebb 5 azonos színű szakasz van köztük, akkor összesen legfeljebb $3 \times 5 = 15$ szakaszunk lenne, ami ellentmond a 16-nak). Továbbá tekintsük a 6, *A*-tól különböző végét a 6 szakasznak! Ha az őket összekötő szakaszok egyikeke, például a *B* és *C* pontok között, akkor az *ABC* háromszög kék és készen vagyunk. Tekintsük azt az esetet, mikor a 6 pontot összekötő minden szakasz piros vagy zöld. Ez a feltétel már az előző feladathoz vezet vissza és így következik belőle egy egyszínű háromszög létezése.

21. feladat. 193 szúnyog ül egy téglalap alakú, 3 m × 2 m kiterjedésű füves területen. Meg lehet-e ölni egyszerre legalább 3 szúnyogot egy 25 cm × 25 cm-es lapáttal?

Megoldás: A válasz igen. Elegendő a területet 96 darab 25 cm × 25 cm-es négyzetre osztani. A skatulya-elv alapján az egyik ilyen négyzeten legalább 3 szúnyog fog ülni. Ezután már csak pontosan el kell eltalálni azt a négyzetet.

22. feladat. 802 pont van bejelölve egy 20 cm oldalhosszúságú négyzeten. Bizonyítsuk be, hogy vagy létezik egy olyan 1 cm oldalhosszúságú négyzet, ami legalább 4 pontot tartalmaz, vagy 2 darab olyan 1 cm oldalhosszúságú négyzet, amelyek mindegyike 3 pontot tartalmaz.
Megoldás: Ebben az esetben a 400 egység-négyzet (azaz 1 cm oldalú négyzet) jelenti a fiókokat, amikre az eredeti négyzet felosztható. A skatulya-elvből következik, hogy egyikük legalább 3 pontot tartalmaz. Ha a pontok száma több mint 3, akkor készen vagyunk. Tegyük fel, hogy a pontok száma pontosan 3! Akkor a visszamaradó 799 pont a másik 399 négyzeten helyezkedik el. A skatulya-elvből megint következik, hogy a 399 négyzet egyike legalább 3 pontot tartalmaz. Ha a pontok száma több mint 3, akkor megint készen vagyunk. Ellenkező esetben a pontok száma pontosan 3, így kapunk egy második 1 cm oldalhosszúságú négyzetet is, ami 3 pontot tartalmaz.

Az egyértelmű, hogy a korábbi feladatok megoldásának alapvető részlete a fiókok meghatározása volt. A skatulya-elv alkalmazása lehetőséget ad arra, hogy megbecsüljük a „tárgyak” szétosztását a fiókokba. A feladatoknak van egy másik osztálya is, amik a skatulya-elvhez hasonló indoklással oldhatóak meg. Használhatunk „fiókokat” a megoldásukban, de ez esetben korlátoltakat, azaz csak korlátolt számú tárgy helyezhető el bennük. A skatulya-elvvel ellentétben azonban a becslések nem a tárgyak szétosztásával kapcsolatban, hanem a teljesen betöltött fiókokban érdekeltek. A folytatásban ilyen típusú feladatok szerepelnek.

23. feladat. Egy osztályteremben 15 asztal van és minden asztal mellett két szék. 22 diák van jelen a matematika órán. Bizonyítsuk be, hogy legalább 7 asztalnál párosan ülnek a diákok!
Megoldás: Most az asztalok a fiókok, amik korlátozottak, mivel legfeljebb kettő diák ülhet egy asztalnál. Ha minden asztalnál csak egy diák foglal helyet, akkor a visszamaradó 7 diáknak (22 – 15 = 7) 7 asztalhoz kell ülnie, így 7 asztalnál fognak párosan ülni.

24. feladat. Egy szabályos húszszög csúcsai mind kékre vagy pirosra vannak festve. A piros csúcsok száma 9, a kék csúcsok száma 11. Bizonyítsuk be, hogy legalább 2 kék csúcs átlósan ellentétesen helyezkedik el!
Megoldás: A fiókok most a szabályos húszszög körülírt körének a csúcsokat tartalmazó átmérői lesznek. Minden átmérő két ellentétes csúcsot köt össze. Minden fiók korlátolt – mindegyikük legfeljebb 2 pontot tartalmaz, amik az átmérők végei. Számuk 10. Tekintsük most azokat a fiókokat, amelyekben legalább egy piros csúcs van. Számuk maximum 9. Mivel összesen 10 fiók van, ezért létezik egy fiók, amiben nincsen piros csúcs. Ennek az átmérőnek a végpontjai kékek, és ezzel be is fejeztük a bizonyítást.

25. feladat. Keressük meg a kifejezés értékét, ha a különböző számjegyekhez különböző betűket rendeltünk, és azonos számjegyekhez azonos betűket rendeltünk:

$$\frac{D\times I\times R\times I\times C\times H\times L\times E\times T}{P\times R\times I\times N\times C\times I\times P\times L\times E}.$$

Megoldás: Mind a 10 lehetséges számjegy egy-egy fiók, amik korlátozottak - legfeljebb egy betű helyezhető el bennük. Mivel 10 különböző betű van a kifejezésben, ezért következik, hogy az egyik 0-nak felel meg. Másrészről a 0 nem szerepelhet a nevezőben, ami azt jelenti, hogy a számlálóban kell lennie és így a kifejezés értéke 0.