Szélsőérték problémák elemi megoldása

I. rész

Izoperimetrikus problémák

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Ebben a dolgozatban szélsőértékek számolásával foglalkozunk, de csupán csak elemi módszereket használunk. Ez azt jelenti, hogy teljesen mellőzzük a matematikai analízis eszközeit. Ez egyes feladatok esetén nem is használható, más esetben inkább az elemi módszerek szépségeire, sokszínűségére és változatosságára fektetjük a hangsúlyt.

A szélsőérték fogalma gyűjtő fogalom, a legnagyobb (maximum) és a legkisebb (minimum) értékek közös megnevezésére használják. Ezek értelmezése a következő:

1. **Értelmezés**: Az $f : D \subseteq R \to R$ függvénynek $M = f(a)$ globális maximuma (egyszerűen maximuma), ha $f(x) \leq M$ minden $x \in D$ esetén.
2. **Értelmezés**: Az $f : D \subseteq R \to R$ függvénynek $m = f(\mathrm{b})$ globális minimuma (egyszerűen minimuma), ha $f(x) \geq m$ minden $x \in D$ esetén.

Amennyiben az egyenlőtlenségek a D halmaznak csak egy részhalmazán teljesülnek, a szélsőértékek csak lokáli vagy helyi szélsőértékek. Egy függvénynek lehet több lokális minimuma vagy maximuma is, és a lokális maximum kisebb is lehet mint a lokális minimum. A lokális maximum közül a legnagyobb a függvény globális maximuma, a lokális minimumok közül a legkisebb a függvény globális minimuma.

A szélsőérték problémák közül egyik legrégibb problémák az úgynevezett izoperimetrikus problémák. Az „izoperimetrikus” szó az izo = állandó, periméter = kerület szóösszetételből ered. A probléma a következő:

A síkbeli izoperimetrikus tétel:

a) Az adott kerületű síkalakzatok közül a kör a legnagyobb területű.
b) Az adott területű síkalakzatok közül a kör a legkisebb kerületű.

Euklidész aki i.e. 300 körül élt, már ismerte a téglalapok izoperimetrikus problémájának a megoldását, amely valószínűleg már előtte is ismert volt. Arkhimédesz (i.e. 287-212), ismerte az izoperimetrikus tétel állítását. Időszámításunk kezdete táján a geometriai szélsőértékek tanulmányozása már meglehetősen fejlett volt. Tudomásunk van arról, hogy Zenodórosz, aki kb. i.e. 200 és i.sz. 90 között élt, írt egy „Izoperimetrikus alakzatok” című könyvet, ennek sajnos egyetlen példánya sem maradt hátra, de az ő eredményeit újra ismertette és bebizonyította az alexandriai *Papposz* i.sz. 300 körül.

A monda szerint az izoperimetrikus probléma eredete a következő: *Dido*, *Tyrosz* királyának lánya volt. Nagybátyjához, *Acerbászhoz* ment feleségül, akit azonban mesés vagyona miatt hamarosan meggyilkoltak. Dido ekkor *Acerbász* kincseivel együtt Ciprusra menekült, majd innen tovább hajózott Afrika Szicíliához közeli partjaira. Elment a vidék uralkodójához és elmondta neki, hogy szeretne a tengerpart mentén egy földdarabot vásárolni, de nem nagyobbat, mint amekkorát egy marhabőrrel körül tud keríteni. Az uralkodó mosolyogva beleegyezett a szépséges királynő kérésébe, sőt nagylelkűen még meg is ajándékozta egy jókora marhabőrrel. Az okos *Dido* keskeny csíkokra vágta azt szét és a szeleteket összecsomózva olyan hosszú kötélhez jutott, amelyikkel jóval nagyobb (tengerbenyúló) földterületet lehetett elkeríteni a tengerparton, mint amekkorát az uralkodó elképzelt. Így alapította meg Karthágó virágzó városát, aminek később ő lett a királynője.

A középkorban számos neves matematikus foglalkozott ezzel a témakörrel. Néhány híres nevet említve: *Descartes* (1596-1650), *Jacob Bernoulli* (1645-1705*), Johann Bernoulli* (1667-1748), *Euler* (1707-1783), *Lagrange* (1736-1813), és mások Kétségtelenül *Jacob Steiner* (1796-1863) svájci matematikus volt az, akinek a munkássága a korábbi eredmények betetőzését jelentette, szintetizálta a korábbi eredményeket, új ötletekkel gazdagította e problémakört, de mindegyikük (akárcsak *Zenodórosz* is), nyilvánvalónak tartotta és nem bizonyította azt, hogy létezik megoldása ennek a problémának. (v.ö. [3], 9. oldal). Dirichlet (1805-1859) vette észre először az izoperimetrikus tétel eddigi bizonyításának a hiányosságát, és csak 1870-ben, Weierstrass (1815-1892) küszöbölte ki ezt, ugyanis szigorúan bebizonyította a kör nevezetes szélsőérték tulajdonságát. Ezek után számos más matematikus foglalkozott a probléma különböző bizonyításával (v. ö. [3], 26. oldal), de mindmáig egyetlen igazán elemi bizonyítás sem született.

A síkbeli izoperimetrikus tétel bizonyításának a menete a következő:

1) A Weierstrass–tétel segítségével belátjuk, hogy az adott k kerületű n oldalú sokszögek között létezik maximális területű, ha n rögzített.
2) Belátjuk, hogy az azonos hosszúságú, n oldalú, zárt sokszögvonalak közül a szabályos sokszög területe a legnagyobb.
3) Belátjuk, hogy az adott k kerületű, szabályos sokszögek területének van szuprémuma, midőn befutja N-et, a k kerületű kör területe.

Mivel erre nincs elemi bizonyítás, a dolgozatunkban ezt nem is mutatjuk be, ellenben megjegyezzük, hogy a bizonyításnak számos láncszeme elemi, és ezeket részben fellelhetjük a következő feladatok bizonyításában.

1) A háromszög izoperimetrikus tételei:

a) Adott kerületű háromszögek közül az egyenlő oldalúnak a legnagyobb a területe.
b) Adott területű háromszögek közül az egyenlő oldalúnak a legkisebb a kerülete.

Bizonyítás: Jelölje a, b, c az ABC háromszög megfelelő oldalainak a hosszát, és legyen $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ a háromszög félkerülete, és T a területe. Ekkor Heron képlete szerint $T=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

De a számtani és mértani közepeknek az $\dfrac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}$ egyenlőtlensége alapján felírható, hogy

$$T^2=p(p-a)(p-b)(\mathrm{p-c})\leq \mathrm{p}\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3=\frac{p^4}{27} \text{ vagyis } 3\sqrt{3}\cdot T\leq p^2 \quad (*)$$

Mivel a (*) egyenlőtlenségben az egyenlőség a=b=c esetben áll fenn, ezért a két tétel állítása nyilvánvaló, sőt mi több, az a) esetben ha p állandó, akkor $T_{\max}=p^2\dfrac{\sqrt{3}}{9}$, a b) esetben pedig ha T állandó, akkor $p_{\min}=\sqrt{3\sqrt{3}\cdot T}$.

2) A négyszög izoperimetrikus tételei:

a) Adott kerületű négyszögek közül a négyzetnek a legnagyobb a területe.
b) Adott területű négyszögek közül a négyzetnek a legkisebb a kerülete.

Bizonyítás: Jelölje a, b, c, d az ABCD négyszög megfelelő oldalainak a hosszát, és legyen $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ a négyszög félkerülete, és T a területe. A négyszögek esetében is fennáll a Heron képlethez hasonló összefüggés: $T=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(\mathrm{p-d})-abcd\cdot\cos^2\dfrac{B+D}{2}}$.

De a számtani és mértani közepeknek az $\dfrac{x+y+z+t}{4}\geq\sqrt[4]{xyzt}$ egyenlőtlensége alapján felírható, hogy

$$T^2\leq(p-a)(p-b)(\mathrm{p-c})(\mathrm{p-d})\leq\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)+(\mathrm{p-d})}{4}\right)^4=\left(\frac{3p}{4}\right)^4 \quad (**)$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha először is $\cos^2\dfrac{B+D}{2}=0\Leftrightarrow B+D=180°$ vagyis a négyszög körbeírható, továbbá még a= b= c= d is kell teljesüljön. Ezért a (**) egyenlőtlenség alapján a két állítás bizonyítása nyilvánvaló, sőt mi több, az a) esetben ha p állandó, akkor $T_{\max} = \left(\frac{3p}{4}\right)^2$, a b) esetben pedig ha T állandó, akkor $p_{\min} = \frac{4\sqrt{T}}{3}$.

Tanulságos külön megvizsgálni a következő sajátos esetet:

3) A téglalap izoperimetrikus tételei:

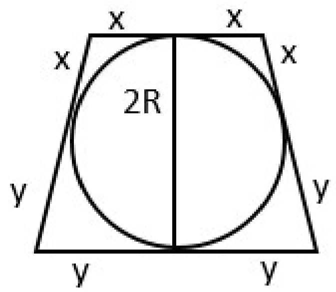
a) Adott kerületű téglalapok közül a négyzetnek a legnagyobb a területe.

b) Adott területű téglalapok közül a négyzetnek a legkisebb a kerülete.

Bizonyítás: Jelöljük, x, y-nak a téglalap méreteit, T-vel a területét, K-val a kerületét. Tehát T=xy és K=2(x+y). Az $\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$ középarányos egyenlőtlenség alapján azonnal adódik, hogy $T \le \left(\frac{K}{4}\right)^2$. És mivel az egyenlőség csak x=y esetben áll fenn, ezzel beláttuk az állításainkat.

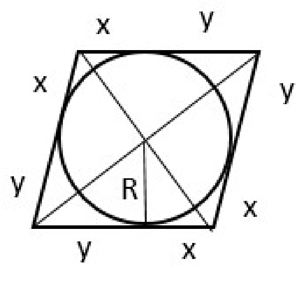
4) Keressük meg egy adott R sugarú kör köré írt egyenlő szárú trapéz kerületének a minimumát!

Megoldás: A mellékelt ábra szerint jelölje x illetve y a csúcsok távolságát az érintési pontoktól. Meghúzva a trapéz két magasságát, Pitagorasz tétele alapján $(2R)^2 = (x+y)^2 - (x-y)^2$ ahonnan $xy = R^2$. Ezzel a feltétellel meg kell állapítanunk a p=4(x+y) trapézkerület legkisebb értékét. Mivel $\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$, ezért $\frac{p}{8} \ge \sqrt{R^2} \Leftrightarrow p \ge 8R$ és egyenlőség az $x = y = R\sqrt{2}$ esetben áll fenn, amikor is a trapéz négyzetté alakul, és ekkor $p_{\min} = 8R\sqrt{2}$.



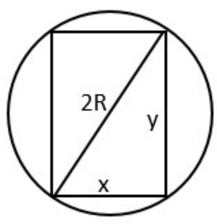
5) Mekkora a minimális kerületű rombusz oldala, ha a beírható kör sugara R?

Megoldás: A mellékelt ábra szerint jelölje x illetve y a csúcsok távolságát az érintési pontoktól. Mivel a rombusz átlói merőlegesek egymásra, ezért a magasságtétel értelmében $R = \sqrt{xy} \Leftrightarrow xy = R^2$. Ezzel a feltétellel meg kell állapítanunk a p=4(x+y) rombuszkerület legkisebb értékét. Mivel $\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$, ezért $\frac{p}{8} \ge \sqrt{R^2} \Leftrightarrow p \ge 8R$ és egyenlőség az $x = y = R\sqrt{2}$ esetben áll fenn, amikor is a rombusz négyzetté alakul, és ekkor $p_{\min} = 8R\sqrt{2}$.

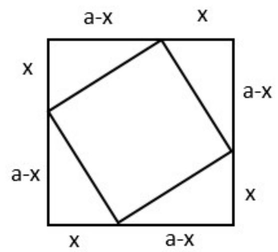


6) Határozzuk meg az R sugarú körbe írt téglalapok közül azt, amelyiknek a legnagyobb a területe!

Megoldás: A téglalap oldalait jelöljük x illetve y-nal. Felírható, hogy $x^2 + y^2 = 4R^2$. Továbbá ha T a téglalap területe, akkor $T = xy$. Képezzük a következő függvényt: $f(x, y) = x^2 y^2 = x^2(4R - x^2) = -x^4 + 4R^2 x^2$. Ekkor az $x^2 = t$ jelöléssel, az $f(t) = -t^2 + 4R^2 t$ függvény minimumát kell meghatározni, amit a $t = -\frac{b}{2a} = 4R^2$ esetben vesz fel, ahonnan $x = R\sqrt{2}$ és így $y = R\sqrt{2}$ ami azt jelenti, hogy a téglalap akkor veszi fel a legnagyobb területet, amikor éppen négyzet.

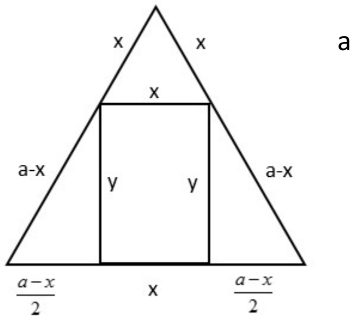


7) Határozzuk meg, hogy adott négyzetbe írt négyzetek közül melyiknek minimális a területe!



Megoldás: Legyen az eredeti négyzet oldala a. A mellékelt ábra jelöléseit használva felírhatjuk, hogy a beírt négyzet oldalhossza egyenlő $\sqrt{x^2+(a-x)^2}=\sqrt{2x^2-2ax+a^2}$, ezért a beírt négyzet területe $T=2x^2-2ax+a^2$ aminek minimuma van, és ezt a minimumot $x=-\frac{b}{2a}=\frac{a}{2}$ esetben veszi föl, vagyis akkor, amikor a beírt négyzet csúcsai éppen oldalfelező pontok.

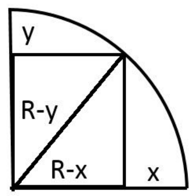
8) Határozzuk meg az adott szabályos háromszögbe írt téglalapok közül azt, amelynek a legnagyobb a területe!



Megoldás: A szabályos háromszög oldalhossza legyen *a*, továbbá a téglalap méretei pedig *x* és *y*. A mellékelt ábra jelöléseit használva számítsuk ki a téglalap *y* méretű oldalhosszát:

$y=\sqrt{(a-x)^2-\left(\frac{a-x}{2}\right)^2}=(a-x)\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tehát a téglalap területe $T=\frac{\sqrt{3}}{2}x(a-x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{a\sqrt{3}}{2}x$. Ennek a másodfokú kifejezésnek maximuma van, és ezt $x=-\frac{b}{2a}=\frac{a}{2}$ esetben veszi föl, amikor is $y=\frac{a\sqrt{3}}{4}$ vagyis a téglalap vízszintes oldal a középvonal, a függőleges oldala a szabályos háromszög magasságának a felével egyenlő.

9) Az R sugarú negyedkörbe téglalapot írunk úgy, hogy egyik csúcs a negyedkör középpontjában, másik csúcsa a negyedkörön legyen. Mikor a legnagyobb ennek a területe?

R


R

Megoldás: A mellékelt ábra jelöléseit használva felírjuk a téglalap területét: $T=(R-x)(R-y)$ és ugyanakkor $(\mathrm{R}-\mathrm{x})^2+(\mathrm{R}-\mathrm{y})^2=\mathrm{R}^2$

Az $\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab$ egyenlőtlenség alapján $a=R-x,\ b=R-y$ választással $\frac{R^2}{2}\geq T$ adódik, egyenlőség a= b vagyis x= y esetben áll fenn amikor is $R-x=R-y=\frac{R\sqrt{2}}{2}$ vagyis a téglalap tulajdonképpen négyzet.

10) Adva van egy háromszög a alapja és k kerülete. Mikor maximális a terület?

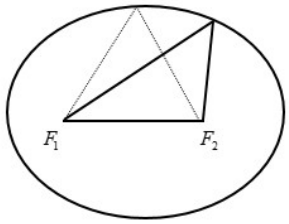
1. **Megoldás**: A Héron képlete szerint, ha $p=\frac{k}{2}=\frac{a+b+c}{2}$ a háromszög félkerülete, akkor

$T=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Ebből állandó az a és a $p-a$ ezért írjuk a területet így:

$T=\sqrt{p(p-a)}\cdot\sqrt{(p-b)(p-c)}$. Most alkalmazzuk a $\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$ egyenlőtlenséget az $x=p-b$

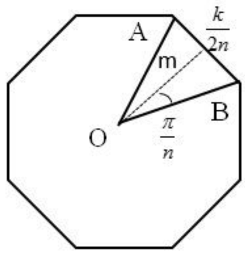
és $y = p - c$ választással. Ekkor $\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{p-b+p-c}{2} = \frac{a}{2} = állandó$. Tehát

$T \leq \sqrt{p(p-a)}\,\frac{a}{2} = állandó$. Egyenlőség akkor áll fenn, ha x=y, vagyis b= c, vagyis a háromszög egyenlő szárú.



2. Megoldás: Rajzoljunk olyan ellipszist, amelynek a fókuszpontjai az adott alappal egyenlő távolságra vannak egymástól, továbbá a nagytengelye a háromszög kerületének és alapjának a különbsége. Ezen az ellipszisen helyezkedik el a háromszög harmadik csúcsa, és a legnagyobb magasság nyílván valóan az ellipszis tető- illetve mélypontjához tartozik, tehát a legnagyobb területű az a háromszög, amely egyenlő szárú.

11) Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő kerületű szabályos sokszögek közül annak nagyobb a területe, amelyiknek több oldala van!



Megoldás: Legyen O a szabályos sokszög középpontja, k a kerülete, és rajzoljuk meg az egyik oldalához tartozó OAB egyenlő szárú háromszöget, amelynek a magassága legyen m, a középpontnál levő csúcsszög fele pedig $\frac{\pi}{n}$. Így a szabályos sokszög területe

$T_n = n \cdot \frac{k}{2n} \cdot m = \frac{k}{2} \frac{\frac{k}{2n}}{tg\frac{\pi}{n}} = \frac{k^2}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{tg\frac{\pi}{n}}$. Legyen most a két egyenlő kerületű, de különböző n_1 illetve n_2 oldalszámú szabályos sokszög. Ezek területe akkor

$T_1 = \frac{k^2}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{n_1}}{tg\frac{\pi}{n_1}}$ illetve $T_2 = \frac{k^2}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{n_2}}{tg\frac{\pi}{n_2}}$. Azt kell megmutatnunk, hogy ha például $n_1 > n_2$, akkor

$T_1 > T_2$. Mindenek előtt szögezzük le, hogy $n_2 \geq 3$, tehát $\alpha_2 = \frac{\pi}{n_2} \leq \frac{\pi}{3}$ és $0 < \alpha_1 = \frac{\pi}{n_1} \leq \alpha_2$.

Nyílván elegendő bizonyítani, hogy $\frac{\alpha_1}{tg\alpha_1} > \frac{\alpha_2}{tg\alpha_2} \Leftrightarrow \frac{tg\alpha_1}{\alpha_1} < \frac{tg\alpha_2}{\alpha_2}$. Az utóbbi egyenlőtlenség helyes voltát beláthatjuk, ha megrajzoljuk a tgx függvény grafikus képét a $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ intervallumon, ahol a függvény görbe alulról domború (konvex), így az O-t a $(\alpha_1, tg\alpha_1)$ ponttal összekötő húr alatta lesz az O-t a $(\alpha_2, tg\alpha_2)$ ponttal összekötő húrnak, vagyis az első húr egyenesének az iránytangense kisebb mint a második egyenes iránytangense, vagyis $\frac{tg\alpha_1}{\alpha_1} < \frac{tg\alpha_2}{\alpha_2}$.Ezzel igazoltuk az állításunkat.

Eredményül az is következik, hogy az adott kerületű, különböző oldalszámú szabályos sokszögek között nincsen maximális területű.

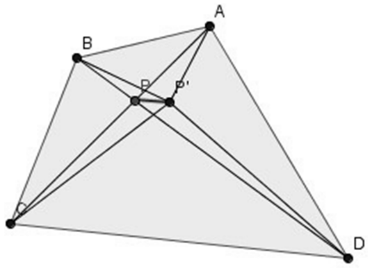
Ezzel befejezzük az izoperimetrikus típusú szélsőértékek vizsgálatát és megjegyezzük, hogy a dolgozatunk következő részében geometriai jellegű problémák szélsőértékeivel foglalkozunk.

Szélsőérték problémák elemi megoldása
II. rész
Geometriai szélsőértékek

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

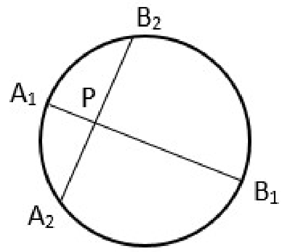
Ebben a részben geometriai problémák szélsőértékeinek a megállapításával foglalkozunk, a síkgeometriai vizsgálatokat részesítve előnybe. Ezúttal is csak elemi módszerekkel bizonyítunk, mellőzve a felsőbb matematikai fogalmakat, ismereteket, számolásokat.

1. **példa**: Az ABCD konvex négyszög belsejében keressük meg azt a P pontot, amelyre a PA+PB+PC+PD összeg minimális.



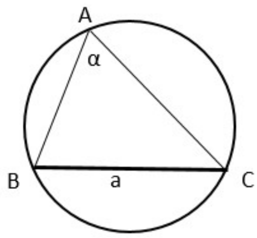
Megoldás: Igazolni fogjuk, hogy a szóban forgó P pont éppen az AC és BD átlók metszéspontja lesz. Feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy az átlók metszéspontján kívül létezik olyan P' pont amelyre P'A+P'B+P'C+P'D < PA+PB+PC+PD. A háromszög egyenlőtlensége alapján felírható, hogy
P'A+ P'C > AC = PA+ PC és P'B+ P'D> BD= PB+ PD és ezek összegzéséből adódik, hogy P'A+P'B+P'C+P'D> >PA+PB+PC+PD és ez ellentmondás.

2. **példa**: Adott körlemeznek egy tetszés szerinti pontjában rajzoljuk meg a legnagyobb és a legkisebb húrt!



Megoldás: Legyen P a körlemez egy adott pontja. Nyílván való, hogy ezen át húzott leghosszabb húr éppen az átmérő lesz, legyen ez A_1B_1 . Legyen most A_2B_2 egy másik húr, amelyik áthalad a P ponton. A pontnak a körre vonatkozó hatványa szerint ellenben $A_1P \cdot PB_1 = A_2P \cdot PB_2 = \acute{a}lland\acute{o}$.
De a számtani és mértani közepek egyenlőtlensége alapján felírható, hogy
$A_2B_2 = A_2P + PB_2 \geq \sqrt{A_2P \cdot PB_2} = \acute{a}lland\acute{o}$, egyenlőség akkor áll fenn, ha $A_2P = PB_2$ de ez csak akkor igaz, ha az A_2B_2 húr merőleges az A_1B_1 húrra.

3. **példa**: Azon háromszögek közül, amelyek egyik szöge α, a vele szemközti oldala a, szerkesszük meg a legnagyobb kerületűt!



Megoldás: Tehát a szóban forgó ABC háromszög A szöge α nagyságú, és BC oldala a nagyságú, adott szakasz. Ezek szerint az A pont egy olyan körön változik, amelyben a BC egy húr, és az A csúcs a körön van, α nagyságú kerületi szög. A szinusz tétel alapján

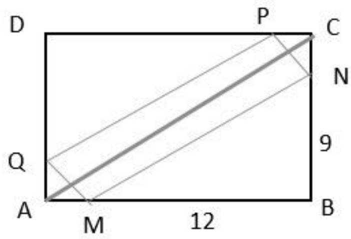
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$. Mivel $\frac{a}{\sin\alpha}$ állandó, ezért az R is állandó.
Továbbá $b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C$ ahonnan kapjuk, hogy

$$b + c = 2R(\sin B + \sin C) = 4R\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 4R\cos\alpha \cdot c\,\mathrm{os}\frac{B-C}{2} \leq 4R\cos\alpha = \acute{a}lland\acute{o}$$

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $c\,\mathrm{os}\frac{B-C}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{B-C}{2} = 0 \Leftrightarrow B = C$ vagyis az ABC háromszög egyenlő szárú.

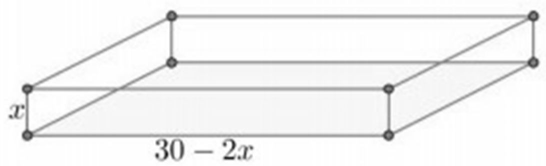
4. **példa**: Egy téglalap oldalai 12cm illetve 9cm hosszúak. Bizonyítsuk be, hogy a téglalapba írható négyszögek kerülete legalább 30cm!

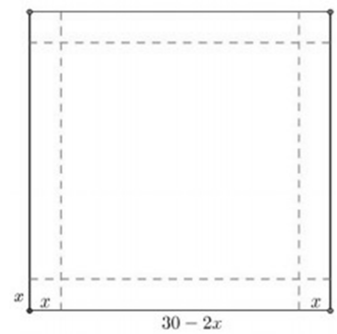
Megoldás: A téglalapba egy tetszőleges MNPQ négyszöget írunk. Vegyük észre, hogy ez egyre kisebb méretű, ahogy két oldala a négyzet egyik átlója felé közeledik. Ezen közeledéskor (lásd az ábrát) az MNPQ négyszög két oldala a 0 felé közeledik, másik kettő pedig a téglalap átlója felé tart. Végső állapotban megkapjuk a degenerált négyszöget, amelyiknek két oldala az MQ és NP éppen 0-val egyenlő, az MN és PQ oldalai pedig a téglalap átlójával, ami éppen 15 cm. Ezek szerint a minimális kerület 2×15=30 cm.



A téglalapba egy tetszőleges MNPQ négyszöget írunk. Vegyük észre, hogy ez egyre kisebb méretű, ahogy két oldala a négyzet egyik átlója felé közeledik. Ezen közeledéskor (lásd az ábrát) az MNPQ négyszög két oldala a 0 felé közeledik, másik kettő pedig a téglalap átlója felé tart. Végső állapotban megkapjuk a degenerált négyszöget, amelyiknek két oldala az MQ és NP éppen 0-val egyenlő, az MN és PQ oldalai pedig a téglalap átlójával, ami éppen 15 cm. Ezek szerint a minimális kerület 2×15=30 cm.

5. **példa**: Egy 30 cm oldalú négyzet négy sarkából vágjunk le négy egybevágó négyzetet úgy, hogy a lap négy szélének a felhajtásával a lehető legnagyobb térfogatú dobozt kapjunk! Adjuk meg ennek a térfogatát!

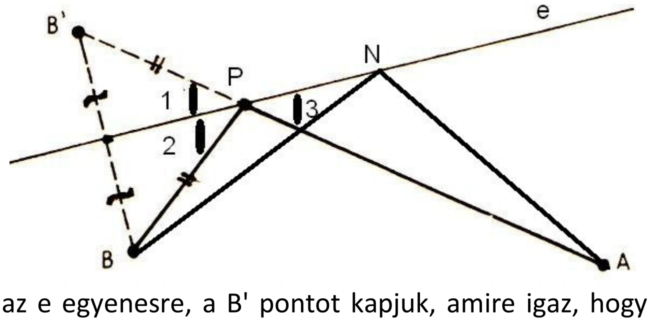




Megoldás: Jelöljük x-el a levágandó kis négyzet oldalának a hosszát. A doboz méretei a mellékelt ábrán láthatók. Ennek a térfogata $V=(30-2x)^2x$ ahol *0< x< 15*. Ekkor felírható, hogy $4V=(30-2x)\cdot(30-2x)\cdot 4x$, és mivel $30-2x+30-2x+4x=60=\acute{a}lland\acute{o}$, ezért az $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$ egyenlőtlenség alapján $\sqrt[3]{4V}=\sqrt[3]{(30-2x)\cdot(30-2x)\cdot 4x}\leq\frac{60}{3}=20$. Így hát $V_{\max}=20\cdot 20\cdot 5=2000$ és egyenlőség csak $30-2x=4x\Leftrightarrow x=5$ esetben áll fenn.

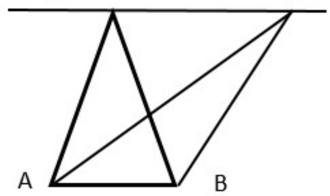
6. **példa**: Adott egy *e* egyenes és egyik az egyik oldalán két különböző pont, A és B. Szerkesszük meg az e egyenesen azt a P pontot, mely esetén az APB törött vonal hossza minimális. (**Héron problémája, vagy tükrözési elv**)

Megoldás: Bebizonyítsuk, hogy azon P pontra minimális az összeg, amelyre $\widehat{ePA}=\widehat{ePB}$



A B pontot tükrözve az e egyenesre, a B' pontot kapjuk, amire igaz, hogy AP+ PB= AP+ PB′, így az AP+ PB′ minimuma pedig úgy áll elő, hogy P rajta van AB'-n amikor is $\widehat{P_1}=\widehat{P_2}=\widehat{P_3}$. Másfelől, ha N az e egyenesnek a P ponttól különböző pontja, akkor megmutatjuk, hogy NA+NB> PA+PB. valóban, mivel NA= NA′ és AP=AP′, a fenti reláció A′N+NB>A′B-vel egyenértékű, ez pedig a háromszög egyenlőtlensége alapján igaz.

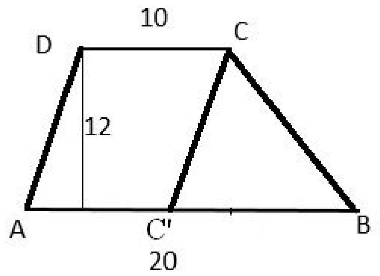
7. **példa**: Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő alapú, és egyenlő területű háromszögek közül az egyenlő szárúnak a legkisebb a kerülete.



Megoldás: Legyen az A és B pont a két rögzített pont. Mivel az ABC háromszög területe állandó, ezért a C csúcs egy olyan e egyenesen mozog, amelyik párhuzamos az AB egyenessel. Ha a CA+CB összeg minimális, akkor a tükrözési elv szerint $\widehat{ACe} = \widehat{BCe}$, ez pedig csak CA=CB esetben lehet igaz.

8. példa: Legalább mekkora annak a trapéznak a kerülete, amelynek alapjai 10 cm és 20 cm hosszúak, magassága pedig 12 cm?

Megoldás: A mellékelt ábra jelöléseit és számadatait használva, a trapéz kerülete helyett elegendő megkeresni a DA + CB szakaszösszeg legkisebb értékét. Ebből a célból csúsztassuk el párhuzamosan a trapéz DA szárát a CC' helyzetbe. Ekkor tehát a BCC' töröttvonal minimumát kell megállapítani. vegyük észre, hogy ezúttal is alkalmazható a tükrözési elv, miszerint a BC+CC' összeg akkor lesz minimális, ha CB= CC'. Ekkor kiszámolva Pitagorasz tétellel a trapéz szárát azt kapjuk, hogy BC=AD= 13 cm. Így hát a trapéz legkisebb trapézkerülete 56 cm×cm.



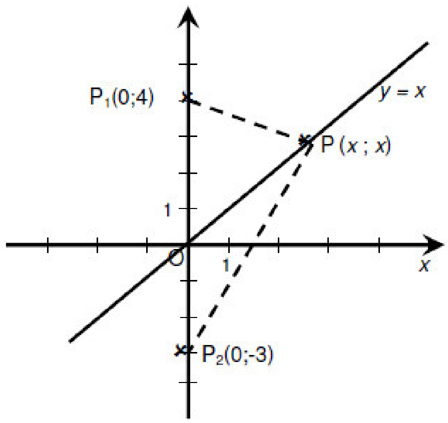
9. **példa**: Határozzuk meg az $f: R \to R,\ f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 41} + \sqrt{x^2 - 2x + 37}$ függvény minimum helyét!

Megoldás:A függvény így is felírható: $f(x) = \sqrt{(x-4)^2 + 5^2} + \sqrt{(x-1)^2 + 6^2}$. Tekintsük a következő pontokat: M(x,0); A(4,-5); B(1,-6). Vegyük észre, hogy $f(x) = MA + MB$, ahol M(x,0) az Ox tengely egy változó pontja. Tehát ennek az összegnek a minimumát kell meghatározni. A tükrözési elv szerint ez az összeg akkor minimális, ha MA=MB, vagyis $\sqrt{x^2 - 8x + 41} = \sqrt{x^2 - 2x + 37}$ ahonnan $x = \frac{2}{3}$ adódik, ami éppen a keresett minimumhely.

10. **példa**: Mennyi az $f(x) = \sqrt{2x^2 - 8x + 16} + \sqrt{2x^2 + 6x + 9}$ függvény minimua, ha $x \in R$.

Megoldás: Az adott függvény még így is felírható:

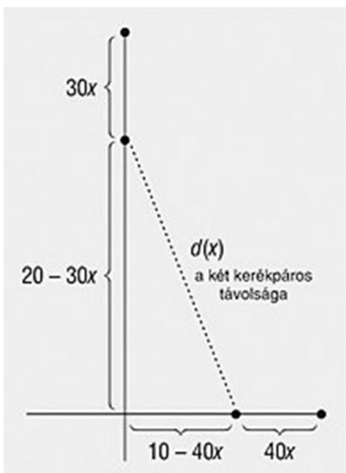
$f(x) = \sqrt{x^2 + (x-4)^2} + \sqrt{x^2 + (x+3)^2}$. Ez nem más, mint az $y = x$ egyenletű egyenesen elhelyezkedő $P(x,x)$ pontnak a távolságainak az összege a $P_1(0,4)$ és $P_2(0,-3)$ pontoktól vagyis $f(x) = |PP_1| + |PP_2|$. Minimizálni ezt az értéket azt jelenti, hogy megkeresni az y=x egyenesen a P pontnak azon helyzetét, amelyre a $|PP_1| + |PP_2|$ összeg a lehető leg kisebb. Belátható, hogy ez akkor a leg kisebb, ha P éppen egybeesik az O origóval, tehát $f(x) \geq f(0) = 4 + 3 = 7$



11. **példa**: Két, egymásra merőleges úton a kereszteződés felé egyenletes sebességgel halad két kerékpáros. Egyszerre indultak, az egyik 30 km/h sebességgel 20 km távolságból, a másik 40 km/h sebességgel 10 km távolságból. Mikor és hol lesznek egymáshoz a legközelebb?

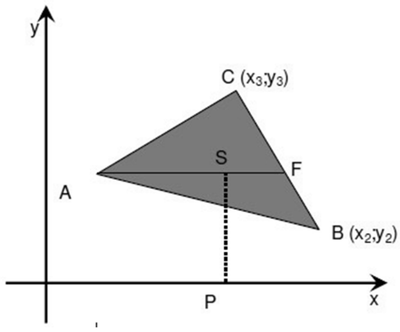
Megoldás: Legyen a keresett idő órában mérve x. Ekkor az egyik úton haladó kerékpáros $30x$ km−t tett meg, míg a másik kerékpáros által megtett út hossza $40x$ km lesz. A két kerékpáros aktuális távolságát Pitagorasz tételének alkalmazásával számolhatjuk: $d(x) = \sqrt{(20-3x)^2 + (10-40x)^2}$.

Legyen $d^2(x) = f(x) = 2500\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + 100$. A függvénynek $x = \frac{2}{5}$ nél lesz minimuma, az az a két kerékpáros $\frac{2}{5}$ óra = 24 perc múlva lesz a legközelebb egymáshoz.



Ez a minimális távolság $\sqrt{100} = 10$ km lesz. Ekkor a 40 km/h sebességgel haladó kerékpáros már áthaladt a kereszteződésen.

12. példa: Adott az ABC háromszög és síkjában az e egyenes. Keressük az e egyenes azon P pontját, amelyre $PA^2 + PB^2 + PC^2$ minimális!



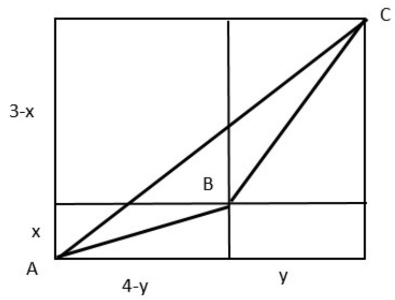
Megoldás: Helyezzük az ábrát koordináta rendszerbe! Speciálisan az e egyenes legyen az x tengely! A keresett P koordinátái: $P(x;0)$. Írjuk fel koordinátákkal a szóban forgó távolságok négyzetösszegét: $f(x) = PA^2 + PB^2 + PC^2 =$
$= (x - x_1)^2 + y_1^2 + (x - x_2)^2 + y_2^2 + (x - x_3)^2 + y_3^2 =$
$= 3x^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3)x + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. Az f függvénynek minimuma van, és ezt a minimumot az $x = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ értékre veszi fel, melyből látható, hogy a keresett P pont nem más, mint az ABC háromszög S súlypontjának az e-re bocsátott merőleges vetülete.

13. példa: Keressük meg az $E = \sqrt{x^2 + (4 - y)^2} + \sqrt{y^2 + (3 - x)^2}$ kifejezés szélsőértékeit, ha $x \in [0,3]$, $y \in [0,4]$!

Megoldás: Tekintsük a 3 és 4 oldalhosszú téglalapot. Annak oldalain vegyük fel az x és 3-x valamint y és 4-y távolságokat, amint a mellékelt ábra mutatja. Ekkor lássuk be, hogy

$$\sqrt{x^2 + (4 - y)^2} + \sqrt{y^2 + (3 - x)^2} = AB + BC \geq AC = \sqrt{(x + 3 - x)^2 + (y - 4 - y)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

hiszen az ABC töröttvonal mindig hosszabb vagy egyenlő az AC szakasszal.



Másfelől figyeljük meg, hogy az ABC töröttvonal akkor lesz a leghosszabb, ha a B csúcs lekerül a téglalap jobb alsó sarkába (lásd a második ábrát). Ezért $\sqrt{x^2 + (4 - y)^2} + \sqrt{y^2 + (3 - x)^2} \leq 4 + 3 = 7$.

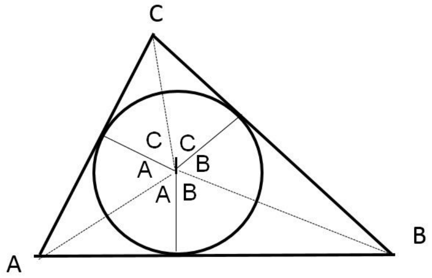
14. példa: Ha A, B, C egy háromszög szögei, akkor mennyi a $\mathrm{E} = \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ szorzat maximuma?

Megoldás: Összeggé alakítva az első szorzatot rendre felírható, hogy: $\mathrm{E} = \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} =$
$= \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{A - B}{2} - \cos\dfrac{A + B}{2}\right)\sin\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{1}{2}\left(1 - \sin\dfrac{C}{2}\right)\sin\dfrac{C}{2}$. Továbbá a számtani és mértani közepek egyenlőtlensége alapján $\left(1 - \sin\dfrac{C}{2}\right)\sin\dfrac{C}{2} \leq \left(\dfrac{1 - \sin\dfrac{C}{2} + \sin\dfrac{C}{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$, tehát $E \leq \dfrac{1}{8}$ és egyenlőség csak az $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$ esetben áll fenn.

15. példa: Melyik hegyesszögű ABC háromszögre a legkisebb az $F = tgA \cdot tgB \cdot tgC$ szorzat értéke?

Megoldás: A számtani és mértani közepek egyenlőtlensége alapján felírható, hogy $\frac{tgA+tgB+tgC}{3} \geq \sqrt[3]{tgA \cdot tgB \cdot tgC}$, de $tgA+tgB+tgC = tgA \cdot tgB \cdot tgC$, ezért azonnal kapjuk, hogy $tgA \cdot tgB \cdot tgC \geq 3\sqrt{3}$, egyenlőség $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ esetben áll fenn.

16. példa: Adott kör köré írható háromszögek közül melyiknek a legkisebb a területe?



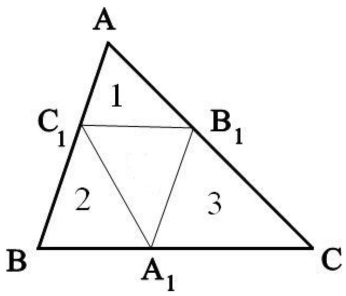
Megoldás: Az általánosság csorbítása nélkül feltételezhető, hogy az adott kör sugara egységnyi. Ekkor, a mellékelt ábra jelöléseivel felírható, hogy: $AB = tgA + tgB$, $BC = tgB + tgC$, $CA = tgC + tgA$. Ekkor az ABC háromszög területe egyenlő:

$$T = \frac{1}{2}\left(tgA + tgB + tgB + tgC + tgC + tgA\right) = tgA + tgB + tgC =$$

$$= tgA \cdot tgB \cdot tgC$$ és már láttuk, hogy $tgA \cdot tgB \cdot tgC \geq 3\sqrt{3}$.

Egyenlőség az $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ esetben, vagyis egyenlő oldalú háromszögben áll fenn.

17. példa: A T területű általános ABC háromszögbe egy $A_1B_1C_1$ háromszöget írunk. Mennyi ennek a háromszög területnek a maximuma?



Megoldás: A mellékelt ábra jelöléseit használva igazoljuk, hogy ha $BA_1 = p \cdot A_1C$, $CB_1 = q \cdot B_1A$, $CC' = r \cdot C'A$, akkor igaz, hogy

$T(A_1B_1C_1) = \frac{1+pqr}{(1+p)(1+q)(1+r)} T(ABC)$. Valóban, felírható, hogy

$T(A_1B_1C_1) = T - T_1 - T_2 - T_3$ (*) ahol T=T=ABC). Továbbá

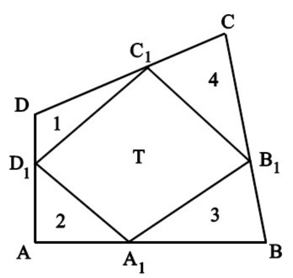
$$T_1 = \frac{AC_1AB_1 \sin A}{2} = \frac{r}{1+r}\frac{1}{1+q}\frac{AC \cdot AB \cdot \sin A}{2} = \frac{r}{1+r}\frac{1}{1+q}T$$

.Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy $T_2 = \frac{p}{1+p}\frac{1}{1+r}T,\ T_3 = \frac{q}{1+q}\frac{1}{1+p}T$. Ezeket behelyettesítve az (1) összefüggésbe, a műveletek elvégzése után éppen a jelzett összefüggés adódik.

De $1+p \geq 2\sqrt{p},\ 1+q \geq 2\sqrt{q},\ 1+r \geq 2\sqrt{r}$, ezért $\frac{1+pqr}{(1+p)(1+q)(1+r)} \leq \frac{1+pqr}{8\sqrt{pqr}} \leq \frac{1}{4}$, hiszen

$\left(1-\sqrt{pqr}\right)^2 \geq 1$, így hát $T(A_1B_1C_1) \leq \frac{1}{4}T(ABC)$. Egyenlőség p= q= r= 1 esetben áll fenn, amikor az $A_1,\ B_1,\ C_1$ pontok éppen oldalfelező pontok.

18. példa: Az ABCD konvex négyszög AB, BC, CD, DA oldalain felvesszük rendre az A_1, B_1, C_1, D_1 pontokat úgy, hogy $\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{BB_1}{B_1C} = \frac{CC_1}{C_1D} = \frac{DD_1}{D_1A} = k > 0$. Ha az ABCD négyszög területe állandó, és az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög területe T, határozzuk meg a T legkisebb értékét!



Megoldás: $T_1 = \frac{k}{k+1}\frac{1}{k+1}T(DAC),\ T_3 = \frac{k}{k+1}\frac{1}{k+1}T(BAC)$ így

$T_1 + T_3 = \frac{k}{(k+1)^2}T(ABCD)$. Teljesen hasonlóan $T_2 + T_4 = \frac{k}{(k+1)^2}T(ABCD)$

Továbbá $T = T(ABCD) - (T_1 + T_2 + T_3 + T_4) = \frac{k^2+1}{k^2+2k+1}T(ABCD)$ és

$\frac{k^2+1}{k^2+2k+1} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (k-1)^2 \geq 0$. Egyenlőség k=1 esetben áll fenn, amikor is A_1, B_1, C_1, D_1 oldalfelező pontok, és $A_1B_1C_1D_1$ paralelogramma.

A következő részben különböző elemi függvények szélsőértékét fogjuk meghatározni elemi módszerekkel.

Szélsőérték problémák elemi megoldása
III. rész
Függvények szélsőértéke

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Ebben a részben egy, vagy többváltozós elemi függvény szélsőértékeit határozzuk meg, elemi módszerekkel. A továbbiakban a módszerek változatosságára szeretnénk figyelmet fordítani.

1. **<u>példa</u>**: Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$ függvény minimumát, ha $x\in R$.

Megoldás: Felírható, hogy $f(x)=\dfrac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2$ mert $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$ minden $a>0$ esetén, és egyenlőség $\sqrt{x^2+1}=1\Leftrightarrow x=0$ esetben áll fenn.

2. **<u>példa</u>:** Határozzuk meg az $f:R_+\to R$, $f(x)=\dfrac{4}{x^2}+x$ függvény legkisebb értékét!

Megoldás: Mivel $\dfrac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$ minden $a>0,\ b>0,\ c>0$ esetén, és egyenlőség csak az $a=b=c$ esetben áll fenn, ezért az $a=\dfrac{4}{x^2},\ b=c=\dfrac{x}{2}$ választással $f(x)\geq 1$ adódik, és egyenlőség a $\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{x}{2}\Leftrightarrow x^3=8\Leftrightarrow x=2$ esetben áll fenn.

3. **<u>példa</u>:** Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{3x^2+18x+23}{x^2+6x+10}$ függvény maximumát, ha $x\in R$.

Megoldás: felírható, hogy $f(x)=\dfrac{3(x^2+6x+10)-7}{x^2+6x+10}=3-\dfrac{7}{x^2+6x+10}$ és ez akkor minimális, ha $\dfrac{7}{x^2+6x+10}$ maximális, és ez akkor igaz, ha $x^2+6x+10$ minimális, de ez akkor igaz, ha $x=-\dfrac{b}{2a}=-3$, így hát $f(x)\geq f(-3)=-4$.

4. **<u>példa</u>:** Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{x^4+2x^3+3x^2+2x^2+2x+2}{x^2+x+1}$ függvény minimumát, ha $x\in R$!

Megoldás: Felírható, hogy $f(x)=\dfrac{(x^2+x+1)^2+x^2+x+1}{x^2+x+1}=x^2+x+1+\dfrac{1}{x^2+x+1}\geq 2$, és egyenlőség csak az $x^2+x+1=1$, vagyis $x\in\{0,-1\}$ esetben áll fenn.

5. **példa:** Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ függvény szélsőértékeit, ha $x\in R$.

Megoldás: Legyen $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=y$, ahonnan $(y-1)x^2-x+y-1=0$ valós x esetén teljesül, ezért $\Delta\geq 0$, ami alapján $4y^2-8y+3\leq 0$ vagyis $y\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$.

6. **példa:** Határozzuk meg az $f:[0,5]\to R$, $f(x)=\frac{2x^2-9x-11}{x^2-5x-6}$ függvény szélsőértékeit!

Megoldás: Felírható, hogy $f(x)=\frac{2(x^2-5x-6)+x+1}{x^2-5x-6}=2+\frac{x+1}{(x-6)(x+1)}=2+\frac{1}{x-6}$. És mivel az $x\to\frac{1}{x-6}$ függvény szigorúan csökkenő, ezért $1=f(5)\leq f(x)\leq f(0)=\frac{11}{6}$.

7. **példa:** Határozzuk meg az $f:[0,1]\to R$, $f(x)=\frac{x+1}{x^2+x+1}$ függvény szélsőértékeit!

Megoldás: Vizsgáljuk meg a függvény monotonitását. Legyen $\alpha>\beta>0$. Ekkor felírható, hogy

$f(\beta)-f(\alpha)=\frac{\alpha^2(1+\beta)-\beta^2(1+\alpha)}{(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)+\alpha\beta(\alpha-\beta)}{(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)}>0$ ami azt jelenti, hogy az f függvény szigorúan csökkenő, ezért $\frac{2}{3}=f(1)\leq f(x)\leq \mathrm{f}(0)=1$

8. **példa**: Határozzuk meg az $f:R\setminus\{1\}\to R$, $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$ függvény szélsőértékeit!

Megoldás: Vegyük észre, hogy $f(x)=\frac{1}{2}\left(x-1+\frac{1}{x-1}\right)$ és az $a+\frac{1}{a}\geq 2$ minden $a>0$ esetén alapján, ha *x> 1*, akkor $f(x)\geq 1$. Ellenben, ha x< 1, akkor mivel $f(x)=\frac{x^2}{2(x-1)}-1$ és $\frac{x^2}{2(x-1)}$ szigorúan csökkenő, ezért $\frac{x^2}{2(x-1)}-1\leq -1$ és egyenlőség csak x= 0 esetben áll fenn. Vegyük észre, hogy az m= 1 a függvénynek csak lokális minimuma, úgyszintén az M= -1 is csak lokális maximuma.

9. **példa**: Határozzuk meg az $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x}$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét, ha $x\in R$!

Megoldás: Mivel $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}$ és egyenlőség csak az $a=b$ esetben áll fenn, ezért az $a=\sqrt{x-3}$ és $b=\sqrt{7-x}$ választással felírható, hogy: $\sqrt{\frac{x-3+7-x}{2}}\geq\frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x}}{2}$, vagyis $\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x}\leq 2\sqrt{2}$, egyenlőség akkor áll fenn, ha $x-3=7-x$, vagyis $x=5$.

Másfelől $f^2(x)=4+2\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{7-x}\geq 4$, és egyenlőség akkor áll fenn, ha $x=3$ vagy $x=7$.

10. **példa**: Határozzuk meg az $f(x)=5\sin x+12\cos x$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét, ha $x\in R$!

Megoldás: Ismert a Cauchy-Buniakovsky-Schwarz féle egyenlőtlenség sajátos esete, miszerint: $\left(aA+bB\right)^2 \le (a^2+b^2)(A^2+B^2)$. Ha most $a=\mathrm{sinx},\ b=\cos x,\ A{=}5,\ B=12,$ akkor

$f^2(x)\le\left(5^2+12^2\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=13^2$, ahonnan $\left|f(x)\right|\le 13$, ezért $-13\le f(x)\le 13$.

11. **példa:** Adjuk meg az $f(x)=\sin^8 x+\cos^8 x$ függvény szélsőértékeit, ha $x\in R$!

Megoldás: Végezzük el az alábbi átalakításokat: $f(x)=(\sin^4 x+\cos^4 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x$.

Ellenben $1=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x$, így felírható, hogy

$f(x)=(1-2\sin^2 x\cos^2 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x=\dfrac{1}{8}\sin^4 2x-\sin^2 2x+1$. Vezessük most be a

$\sin^2 2x=a$ változócserét. Így a $g(a)=\dfrac{1}{8}a^2-a+1=\dfrac{1}{8}(a-4)^2-1$ függvény szélsőértékeit kell meghatároznunk, ahol $0\le a\le 1$. De mivel az *a* változó nem veheti föl az 4 értéket, ezért a g függvény esetén nem írható fel, hogy $\dfrac{1}{8}(a-4)^2-1\ge -1$ hanem arra következtethetünk, hogy a g függvény parabolájának a csúcsa a $V(4,-1)$ pontban van, és mivel $a\le 1$, ezért $a<4$, vagyis a parabolának csak a baloldali leszálló ágáról van szó, ahol a g függvény monoton csökkenő a $\left[0,1\right]$ intervallumon, ezért $\dfrac{1}{8}=g(1)\le g(a)\le g(0)=1$ és ezek adják egyben az f függvény szélsőértékeit is.

12. **példa:** Határozzuk meg az $f:\left[0,1\right]\to R$, $f(x)=2^x3^{1-x}+3^x2^{1-x}$ függvény szélsőértékeit!

Megoldás: Mivel $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\ge\dfrac{a+b}{2}$ és egyenlőség csak az $a=b$ esetben áll fenn, ezért

$\dfrac{f(x)}{2}=\dfrac{2^x3^{1-x}+3^x2^{1-x}}{2}\ge\sqrt{2^x3^{1-x}3^x2^{1-x}}=\sqrt{6}$ vagyis $f(x)\ge 2\sqrt{6}$. Egyenlőség

$2^x3^{1-x}=3^x2^{1-x}\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{1-x}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ esetben áll fenn. Másfelől becsüljük meg az f(x)-5 különbséget! felírható, hogy:

$$f(x)-5=3\left(\frac{2}{3}\right)^x+2\left(\frac{3}{2}\right)^x-3-2=\frac{(3\cdot 2^{2x}-3\cdot 3^x2)+(2\cdot 3^x-2\cdot 2^x3^x)}{6^x}=\frac{3\cdot 2^x(2^x-3^x)-2\cdot 3^x(2^x-3^x)}{6^x}=$$

$=(2^x-3^x)\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^x-\dfrac{2}{3}\right)3^{x+1}\le 0$ ha $x\in\left[0,1\right]$, ezért $f(x)\le 5$. Egyenlőség x=0 vagy x=1 esetben áll fenn.

13. **példa**: Határozzuk mg az $f(x)=ax^m+\frac{b}{x^n}$ függvény minimumát, ha $a,\ b,\ x,\ m,\ n>0$ és m, n természetes számok!

Megoldás: Írjuk fel a számtani és mértani középarányosok közötti egyenlőtlenséget m+n tag esetén, a következő választással:

$$\frac{\left(\frac{ax^m}{n}+\frac{ax^m}{n}+...+\frac{ax^m}{n}\right)+\left(\frac{b}{mx^n}+\frac{b}{mx^n}+...\frac{b}{mx^n}\right)}{n+m}\geq\sqrt[m+n]{\frac{a^n}{n^n}(x^m)^n\frac{b^m}{m^m}\frac{1}{(x^n)^m}}=\left[\left(\frac{a}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{b}{m}\right)^m\right]^{\frac{1}{m+n}}$$

Tehát $f(x)\geq(m+n)\left[\left(\frac{a}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{b}{m}\right)^m\right]^{\frac{1}{m+n}}$, vagyis ez utóbbi kifejezés az f függvény minimuma, és ezt az $\frac{ax^m}{n}=\frac{b}{mx^n}\Leftrightarrow x^{m+n}=\frac{nb}{ma}\Leftrightarrow x=\left(\frac{nb}{ma}\right)^{\frac{1}{m+n}}$ esetben veszi föl.

14. **példa**: Határozzuk meg az $f:R\to R,\ f(x)=x^5-5x^4+11$ függvény szélsőértékeit!

Megoldás: Nyilvánvaló, hogy az $f(x)=x^5-5x^4+11$ függvénynek akkor vannak szélsőértékei, mint amikor a $g(x)=x^5-5x^4=x^4(x-5)$. Ennek a szélsőértékeit könnyen meghatározhatjuk, ha meghatározzuk a $h(x)=-g(x)=x^4(5-x)$ függvény szélsőértékeit. Alkalmazzuk a számtani és a mértani közepek egyenlőtlenségét a következő választással: $1=\frac{\frac{x}{4}+\frac{x}{4}+\frac{x}{4}+\frac{x}{4}+(5-x)}{5}\geq\sqrt[5]{\frac{x^4(5-x)}{4^4}}$, vagyis $h(x)\leq 4^4=256$. Egyenlőség $\frac{x}{4}=5-x\Leftrightarrow x=4$ esetben áll fenn, ekkor h-nak helyi maximuma, így f-nek minimuma van, és minf(x)= f(4)= -245. Másfelől, ha $x\leq 0$ akkor a h függvénynek helyi minimuma van, hiszen $x^4(5-x)\geq 0$ és egyenlőség x=0 esetben áll fenn, ez lesz az f maximum helye, amelyre maxf(x)=f(0)=11.

15. **példa:** Mennyi az $a\cdot b$ minimuma, ha $a>0,\ b>0$ és $5a+7b=1$?

Megoldás: Mivel minden $x>0,\ y>0$ esetén $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ és egyenlőség csak $x=y$ esetben igaz, ezért $\frac{1}{2}=\frac{5a+7b}{2}\geq\sqrt{35ab}$, ahonnan $ab\leq\frac{1}{140}$, egyenlőség $5a=7b$ esetben igaz, az $5a+7b=1$ alapján $a=\frac{1}{10}$ és $b=\frac{1}{14}$ esetben áll fenn.

16. **példa:** Ha $x^2+y^2=1$, akkor határozzuk meg az $E=2x+3y$ kifejezés szélsőértékeit!

Megoldás: Legyen $2x+3y=p$ és az $x^2+y^2=1$ összefüggés alapján, mivel $x=\frac{p-3y}{2}$, ezért $13y^2-6py+p^2-4=0$ megoldható a valós számok halmazán, ezért $\Delta\geq 0$, ahonnan $p^2\leq 13\Leftrightarrow -13\leq p\leq 13$.

17. **példa**: A Descartes-féle síkbeli derékszög_ koordinátarendszer mely pontjaira teljesül, hogy $x^2+y^2=1$ és $|x+y|$ maximális?

Megoldás: Ismert az abszolút érték háromszög egyenlőtlensége, miszerint $|x+y|\le|x|+|y|$ és egyenlőség akkor áll fenn, ha a két szám egyforma előjelű. Továbbá a számtani és négyzetes középarányosok egyenlőtlensége alapján felírható, hogy:

$$\frac{|x+y|}{2}\le\frac{|x|+|y|}{2}\le\sqrt{\frac{|x|^2+|y|^2}{2}}=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Egyenlőség azokra a számpárokra áll fenn, amelyekre az $|x|=|y|$ és x, y azonos előjelű, és $x^2+y^2=1$. Ezért a feltételnek eleget tevő számpárok $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Ezekre az értékekre lesz a $|x+y|$ maximális.

18. **példa**: Mennyi az $E=\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}$ kifejezés minimuma, ha $x>1,\ y>1$?

Megoldás: Végezzük el az *a=x-1* és *b=y-1* változócserét. Ekkor, az $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\ge\frac{x+y}{2}$ egyenlőtlenség alapján $\frac{E}{2}=\frac{\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}}{2}\ge\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}+2\right)\left(b+\frac{1}{b}+2\right)}\ge\sqrt{4\cdot4}=4$, ugyanis $a+\frac{1}{a}\ge2$ és $b+\frac{1}{b}\ge2$, így $E\ge8$, Egyenlőség $a=b=1$ vagyis $x=y=2$ esetben áll fenn.

19. **példa**: Határozzuk meg az $E=\frac{(p^2+p+1)(q^2+q+1)(r^2+r+1)(s^2+s+1)}{pqrs}$ kifejezés minimumát, ha $p,q,r,s>0$.

Megoldás: Mivel $a+\frac{1}{a}\ge2$ minden $a>0$ esetén, ezért $\frac{x^2+x+1}{x}=1+x+\frac{1}{x}\ge3$, így hát $E\ge3\cdot3\cdot3\cdot3=81$, egyenlőség $p=q=r=s=1$ esetben áll fenn.

20. **példa**: Mennyi az $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ minimuma, ha $a>0,\ b>0,\ c>0$?

Megoldás: Mivel minden $x>0,\ y>0$ esetén $\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$ és egyenlőség csak $x=y$ esetben igaz, ezért felírható, hogy: $\frac{a+b}{2}\frac{b+c}{2}\frac{c+a}{2}\ge\sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ca}=abc$, ezért $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\ge8$ és egyenlőség az $a=b=c$ áll fenn.

21. **példa**: Ha $a,b,c\ge-\frac{1}{2}$ és $a+b+c=1$, akkor mennyi az $E=\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}$ kifejezés maximuma illetve minimuma?

Megoldás: Mivel $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \dfrac{x+y+z}{3}$ és egyenlőség az $x=y=z$ esetben áll fenn, ezért az

$x=\sqrt{2a+1}$, y=$\sqrt{2b+1}$, z=$\sqrt{2c+1}$ esetben felírható, hogy $\sqrt{\dfrac{5}{3}} \geq \dfrac{\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}}{3}$,

ahonnan $E \leq \sqrt{15}$, egyenlőség $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ esetben áll fenn. Másfelől felírható, hogy

$E^2 \geq 5+2\left(\sqrt{2a+1}\sqrt{2b+1}+\sqrt{2b+1}\sqrt{2c+1}+\sqrt{2c+1}\sqrt{2a+1}\right) \geq 5$ vagyis $E \geq \sqrt{5}$. Egyenlőség akkor áll fenn, ha a három szám közül kettő $-\dfrac{1}{2}$ -el egyenlő, a harmadik pedig az $a+b+c=1$ alapján *2*-vel egyenlő.

22. **példa**: Az x, y, z valós számokra teljesülnek az $x+y+z=4$ és az $xy+yz+zx=4$ egyenlőségek. Milyen korlátok között változhatnak az x, y, z számok?

Megoldás: Az egyenletrendszer így is felírható: $x+y=4-z$ és $xy=4-z(x+y)$ vagyis $x+y=4-z$ és $xy=4-4z+4z^2$. Képezzük azt a másodfokú egyenletet, amelynek a gyökei x, y :

$t^2-(4-z)t+4-4z+z^2=0$. Mivel az egyenletnek valós gyökei kell legyenek, ezért

$\Delta_t \geq 0 \Leftrightarrow z \in \left[0, \dfrac{8}{3}\right]$. És mivel az eredeti egyenlet rendszer szimmetrikus az $x, y, z-ben$, ezért igaz az is, hogy $x \in \left[0, \dfrac{8}{3}\right]$ és $y \in \left[0, \dfrac{8}{3}\right]$.

23. **példa**: Határozzuk meg az $f(x,y,z)=\dfrac{(x+y+z)^6}{xy^2z^3}$ függvény minimumát, ha x>0, y>0 és z>0 valós számok!

Megoldás: Alkalmazzuk a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenséget 6 tag esetén, a következő választással:

$\dfrac{x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}+\dfrac{z}{3}+\dfrac{z}{3}}{6} \geq \sqrt[6]{x\dfrac{y^2}{4}\dfrac{z^3}{27}}$ ahonnan $f(x,y,z)=\dfrac{(x+y+z)^6}{xy^2z^3} \geq 2^4 3^3$. Egyenlőség az

$x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ esetben áll fenn.

Szakirodalom

[1] Nicholas D. Kazarinoff: Geometriai egyenlőtlenségek, Gondolat Kiadó, 1980
[2] Sándor József: Geometriai egyenlőtlenségek, Dacia Könyvkiadó, Cluj-Napoca, 1988
[3] Major Zoltán: Egy izgalmas szélsőértékfeladat-család, Graphisoft Kft, 1993
[4] Vigné Dr. Lencsés Ágnes: A problémamegoldó képesség fejlesztése szélsőérték feladatok megoldásával, 2007 (tanulmány)
[5] Kapitány Benedek: Szélsőérték-feladatok különböző megoldási módszerei, ELTE, 2012 (szakdolgozat)
[6] Kapitány Benedek: Az izoperimetrikus egyenlőtlenség, ELTE, 2013 (szakdolgozat)
[7] Ábrahám Gábor: Szélsőérték feladatok elemi megoldása 2013 (http://matek.fazekas.hu/images/cikkek/20130112_cikkek_abrahamgabor_szelsoertekelemi.pdf)
[8] Berzsenyi Viktória: Szélsőérték-feladatok különböző megoldási módszerei, ELTE, 2010 (szakdolgozat)
[9] Lengyel Csilla Mária: Szélsőérték-feladatok különböző megoldási módszerei, ELTE, 2012 (szakdolgozat)
[10] Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása, Typotex, Budapest, 1994