Exerciţii şi probleme pentru aprofundarea cunoştinţelor

1. Demonstraţi că următoarele funcţii nu sunt injective:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^8 - 2x^7 - x^6 - 5$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 7x^{2008} - 5x^{2007} + 85$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x^{36} - 5x^{33} + 6x^{30} + 2}$;

d) $f: (0, 3) \to \mathbb{R},\ f(x) = 3\{x\} + 2$;

e) $f: (0, \pi) \to \mathbb{R},\ f(x) = 2\sin x + 5$;

f) $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos^2 x + \cos x - 1$.

2. Determinaţi restricţii injective ale funcţiilor următoare:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2 - 5x + 2$;
b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x + 1$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x + 2|$;
d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = [x]$;

e) $f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} x$;
f) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{|x|}$.

3. Folosind proprietăţi de paritate, periodicitate, strictă monotonie sau reprezentarea grafică stabiliţi dacă funcţiile următoare sunt sau nu injective:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 2$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x - 1| + |x + 1|$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3\cos x + \sin\frac{x}{2}$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$;

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 6x + 5$.

4. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 2mx - 1, & x \le 0 \\ mx - 1, & x > 0 \end{cases}$. Precizaţi valorile parametrului $m \in \mathbb{R}^*$ pentru care funcţia este injectivă. Poate fi f bijectivă? În caz afirmativ, precizaţi f^{-1}.

5. Studiaţi surjectivitatea funcţiei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \le -1 \\ -x - 1, & x \in (-1, 0) \\ 1 - x^2, & x \ge 0 \end{cases}$.

6. Studiaţi bijectivitatea funcţiei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 3}, & x \ge -3 \\ -x^2 + m, & x < -3 \end{cases}$ în funcţie de parametrul $m \in \mathbb{R}$.