2. Hatványozás, gyökvonás

I. Elméleti összefoglaló

Egész kitevőjű hatvány értelmezése:

$$a^0 = 1, \qquad \text{ha } a \in \mathbb{R}; a \neq 0;$$

$$a^1 = a, \qquad \text{ha } a \in \mathbb{R}\,.$$

Ha $a \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}; n > 1$, akkor a^n olyan n tényezős szorzatot jelöl, aminek minden tényezője a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ tényező}.$$

A **hatvány alapja** a; a hatvány **kitevője** n, a hatvány **értéke** a^n.

Ha $\mathrm{a} \in \mathbb{R}, \mathrm{a} \neq 0$ és $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, akkor:

$$a^{-\mathrm{n}} = \frac{1}{a^n}.$$

A hatványozás azonosságai:

Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, akkor:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad a \neq 0$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad b \neq 0$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Az azonosságok pozitív egész kitevő esetén bizonyíthatóak. Negatív egész kitevőre a hatványozást úgy definiáltuk, hogy ezek az azonosságok ilyen esetben is érvényben maradjanak. (**Permanencia elv**)

Számok normálalakja:

Ha $x \neq 0$ valós szám, akkor egyértelműen felírható $x = a \cdot 10^n$ alakban, ahol $1 \leq |a| < 10,\ n \in \mathbb{Z}$. Ezt a felírást a szám normálalakjának nevezzük.

Négyzetgyök értelmezése:

Ha $a \geq 0$ valós szám, akkor $\sqrt{a}$ jelöli azt a nemnegatív valós számot, aminek a négyzete a.

Negatív számnak azért nem értelmezzük a négyzetgyökét, mert nincs olyan valós szám, aminek a négyzete negatív lenne.

Ha $a > 0$,akkor két olyan valós szám létezik, amelynek a négyzete a. A definícióban rögzítettük, hogy a $\sqrt{a}$ jel a pozitiv értéket jelöli. A másik szám jelölésére a $-\sqrt{a}$ jelet használjuk.
Például: $3^2 = (-3)^2 = 9$, tehát $3 = \sqrt{9}$ és $-3 = -\sqrt{9}$.

A definícióból következik, hogy $\sqrt{a^2} = |a|$.

A négyzetgyökvonás azonosságai:

Ha $a, b \geq 0; a, b \in \mathbb{R}$, akkor:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \qquad b \neq 0$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n} \qquad n \in \mathbb{Z} \quad ; \quad n = 0 \text{ esetén } a \neq 0.$$

A gyökvonás általánosítása:

Ha n páros természetes szám és $a \geq 0$ valós szám, akkor $\sqrt[n]{a}$ jelöli azt a nemnegatív valós számot, aminek az $n$edik hatványa a.

Ha n páratlan természetes szám és a tetszőleges valós szám, akkor $\sqrt[n]{a}$ jelöli azt valós számot, aminek az $n$edik hatványa a.

Páratlan gyökkitevő esetén negatív számnak is van gyöke. Például $\sqrt[3]{-8} = -2$, mert $(-2)^3 = -8$. A gyök értéke esetében sem kell megállapodást tennünk az előjelről, mert ilyenkor a definíciónak ilyen feltétel nélkül is csak egy szám felel meg.

A gyökvonás azonosságai:

Ha $a, b \in \mathbb{R}$ (páros n esetében az $a, b \geq 0$ feltétel is szükséges), akkor:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad b \neq 0$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad n, m \in \mathbb{Z} \quad ; \quad n > 1$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} \qquad n, m \in \mathbb{Z} \quad ; \quad n, m > 1$$

Racionális kitevőjű hatvány értelmezése:

Ha $a \in \mathbb{R}$, a>0 ; $p, q \in \mathbb{Z}, q > 1$ akkor $a^{\frac{p}{q}}$ olyan pozitív valós szám, aminek a q-adik hatványa a^p:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Ez a definíció is megfelel annak az elvárásnak, hogy a korábbi azonosságok racionális kitevőjű hatványokra is érvényben maradjanak.

Irracionális kitevőjű hatvány értelmezése:

Ha a pozitív valós szám, akkor a racionális számok halmazán értelmezhetjük az

$$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R};\ f(x) = a^x$$

függvényt. Ha $a > 0$, akkor ez a függvény szigorúan monoton nő, ha $a < 0$, akkor szigorúan monoton csökken, $a = 1$ esetén pedig a függvény értéke minden racionális számra 1.

A hatványozást úgy értelmezzük irracionális kitevőre, hogy hatványozás azonosságai továbbra is érvényben maradjanak és a fenti függvény a valós számokon értelmezve is monoton legyen. Ez az értelmezés minden irracionális kitevő esetében egyértelműen tehető meg.

Egy irracionális számot közelíthetünk racionális számokból álló sorozattal. Ha x irracionális szám és $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ olyan racionális számokból álló sorozat, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_i = x$, akkor létezik a $\lim_{n\to\infty} a^{x_i}$ határérték, és ezzel definiálhatjuk az a^x hatványt.

Megjegyzés:

Ha a kitűzött feladatokban külön nem adjuk meg a kifejezések értelmezési tartományát, akkor a valós számoknak az a legbővebb részhalmazát tekintjük értelmezési tartománynak, amelyen a kifejezésekben szereplő műveletek elvégezhetők, illetve az előforduló függvények értelmezhetők.

II. Kidolgozott feladatok

1. Végezze el a kijelölt műveleteket!

a) $\left(\frac{33^3\cdot5^{-4}\cdot(-4)^3}{(-2)^6\cdot44^2}:\frac{11\cdot(-25)^{-2}}{12^{-3}}\right)^{-2}$ b) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{625}{81}\right)^{-\frac{3}{2}}$ c) $\left[\left(\frac{1}{729}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{5}{2}}$

d) $\frac{(p^3\cdot q^{-2})^2\cdot(q^4\cdot p^{-3})^5}{(p^2\cdot q^{-4})^3}$ e) $\left(\frac{2a^4b^5}{x^2y^3}\right)^5:\left(\frac{2a^4b^5}{x^2y^3}\right)^4$ f) $\left[\left(a^{\frac{1}{b-c}}\right)^{b-\frac{c^2}{b}}\right]^{\frac{b}{b+c}}$

Megoldás:

a) Először áttérünk prímhatványokra, majd egyszerűbb alakra hozunk.

$$\left(\frac{33^3\cdot5^{-4}\cdot(-4)^3}{(-2)^6\cdot44^2}:\frac{11\cdot(-25)^{-2}}{12^{-3}}\right)^{-2}=\left(\frac{(3\cdot11)^3\cdot5^{-4}\cdot(-2^2)^3}{(-2)^6\cdot(2^2\cdot11)^2}:\frac{11\cdot(-5^2)^{-2}}{(2^2\cdot3)^{-3}}\right)^{-2}=$$

$$=\left(\frac{3^3\cdot11^3\cdot5^{-4}\cdot(-2^6)}{2^6\cdot2^4\cdot11^2}\cdot\frac{2^{-6}\cdot3^{-3}}{11\cdot5^{-4}}\right)^{-2}=\left(\frac{-2^0\cdot3^0\cdot5^{-4}\cdot11^3}{2^{10}\cdot5^{-4}\cdot11^3}\right)^{-2}=(-2^{-10})^{-2}=2^{20}.$$

b) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{625}{81}\right)^{-\frac{3}{2}}=(5^{-2})^{-\frac{2}{3}}\cdot(5^4\cdot3^{-4})^{-\frac{3}{2}}=5^{\frac{4}{3}}\cdot5^{-6}\cdot3^6=5^{-\frac{14}{3}}\cdot3^6.$

c) $\left[\left(\frac{1}{729}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{5}{2}}=\left[(3^{-6})^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{5}{2}}=3^{(-6)\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)}=3^5=243.$

d) $\frac{(p^3q^{-2})^2\cdot(q^4\cdot p^{-3})^5}{(p^2q^{-4})^3}=\frac{p^6q^{-4}q^{20}p^{-15}}{p^6q^{-12}}=p^{-15}q^{28}.$

e) $\left(\frac{2a^4b^5}{x^2y^3}\right)^5:\left(\frac{2a^4b^5}{x^2y^3}\right)^4=\left(\frac{2a^4b^5}{x^2y^3}\right)^5\cdot\left(\frac{x^2y^3}{2a^4b^5}\right)^4=\frac{2^5\cdot a^{20}b^{25}x^8y^{12}}{x^{10}y^{15}\cdot2^4\cdot a^{16}b^{20}}=2\cdot a^4b^5x^{-2}y^{-3}.$

f) $\left[\left(a^{\frac{1}{b-c}}\right)^{b-\frac{c^2}{b}}\right]^{\frac{b}{b+c}}=a^{\left(\frac{1}{b-c}\right)\cdot\left(\frac{b^2-c^2}{b}\right)\cdot\left(\frac{b}{b+c}\right)}=a^{\frac{(b-c)(b+c)b}{(b-c)b(b+c)}}=a.$

2. Melyik szám a nagyobb?

a) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{2^{5!}}}}}$ vagy $\underbrace{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\cdots\sqrt[3]{3^{3^{3}}}}}}}}_{27\text{ gyökjel}}$?

b) 2^{300} vagy 3^{200}?

c) 11^{22} vagy 22^{11}?

d) $\sqrt{50}-\sqrt{12}$ vagy $\frac{20-\sqrt{96}}{\sqrt{8}}$?

e) $\sqrt{11}+\sqrt{2}$ vagy $\sqrt{10}+\sqrt{3}$?

Megoldás:

a) Az $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$ azonosság alkalmazásával:

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{2^{5!}}}}}=\sqrt[2\cdot 3\cdot 4\cdot 5]{2^{5!}}=\sqrt[5!]{2^{5!}}=2.$$

$$\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\cdots\sqrt[3]{3^{3^{3}}}}}}}}_{27\text{ gyökjel}}=\sqrt[3^{27}]{3^{3^{3}}}=\sqrt[3^{27}]{3^{3^{27}}}=3.$$

Mivel $2<3$, a második kifejezés értéke a nagyobb.

b) Azonos kitevőjű hatványokat alakítunk ki, így az alapok összehasonlításával kapjuk a sorrendet.

$$2^{300}=(2^3)^{100},\text{ illetve } 3^{200}=(3^2)^{100}$$

$$8^{100}<9^{100}.$$

Mivel $8<9 \Rightarrow 2^{300}<3^{200}$.

c) Mindkét hatványt olyan szorzattá alakítjuk, amelyeknek van közös tényezőjük, így a sorrendet a közös tényezők szorzói döntik el.

$$11^{22}=11^{11}\cdot 11^{11},\text{ illetve } 22^{11}=2^{11}\cdot 11^{11}$$

$$11^{11}>2^{11}.$$

Tehát $11^{22}>22^{11}$.

d) **Első megoldás:** A gyökvonás azonosságait alkalmazva összehasonlítható formára hozzuk mindkét kifejezést.

$\sqrt{50}-\sqrt{12}=5\sqrt{2}-2\sqrt{3}$,

$$\frac{20-\sqrt{96}}{\sqrt{8}}=\frac{20\sqrt{8}-4\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}}{8}=\frac{40\sqrt{2}-16\sqrt{3}}{8}=5\sqrt{2}-2\sqrt{3}.$$

Tehát egyenlő a két kifejezés értéke.

Második megoldás: A két kifejezés különbségének előjele dönti el a sorrendet.

$$\sqrt{50}-\sqrt{12}-\frac{20-\sqrt{96}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{50\cdot 8}-\sqrt{12\cdot 8}-20+\sqrt{96}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{400}-\sqrt{96}-20+\sqrt{96}}{\sqrt{8}}=0.$$

Tehát egyenlő a két kifejezés értéke.

Harmadik megoldás: Két pozitív kifejezés hányadosának nagysága dönti el a sorrendet.

$$\frac{\sqrt{50}-\sqrt{12}}{\frac{20-\sqrt{96}}{\sqrt{8}}}=\frac{\sqrt{50\cdot 8}-\sqrt{12\cdot 8}}{20-\sqrt{96}}=\frac{20-\sqrt{96}}{20-\sqrt{96}}=1.$$

Tehát egyenlő a két kifejezés értéke.

e) Két pozitív szám nagyságának sorrendje megegyezik négyzeteik nagyságának sorrendjével, mert az $f(x)=x^2$ függvény a pozitív valós számok halmazán szigorúan monoton növekvő.

$$\left(\sqrt{11}+\sqrt{2}\right)^2=11+2\sqrt{22}+2=13+2\sqrt{22}$$

$$\left(\sqrt{10}+\sqrt{3}\right)^2=10+2\sqrt{30}+3=13+2\sqrt{30}.$$

Mivel $\sqrt{22}<\sqrt{30}\ \Rightarrow \sqrt{11}+\sqrt{2}<\sqrt{10}+\sqrt{3}$.

3. Határozza meg a következő kifejezés értékét!

$$3^{\frac{1}{2}}-\frac{3-3^{-2}}{3^{\frac{1}{2}}-3^{-\frac{1}{2}}}+\frac{1-3^{-2}}{3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}}+\frac{2}{3^{\frac{3}{2}}}$$

Megoldás

A második és harmadik tag számlálójának és nevezőjének szorzattá alakítása után egyszerűsíthetők a törtek, majd közös nevezőre hozás után adódik a végeredmény. Közben felhasználjuk az a^2-b^2 és az a^3-b^3 szorzattá alakítására vonatkozó nevezetes azonosságokat.

$$3^{\frac{1}{2}}-\frac{3-3^{-2}}{3^{\frac{1}{2}}-3^{-\frac{1}{2}}}+\frac{1-3^{-2}}{3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}}+\frac{2}{3^{\frac{3}{2}}}=3^{\frac{1}{2}}-\frac{3(1-3^{-3})}{3^{\frac{1}{2}}(1-3^{-1})}+\frac{(1-3^{-1})(1+3^{-1})}{3^{\frac{1}{2}}(1+3^{-1})}+\frac{2}{3^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=3^{\frac{1}{2}}-\frac{3(1-3^{-1})(1+3^{-1}+3^{-2})}{3^{\frac{1}{2}}(1-3^{-1})}+\frac{1-3^{-1}}{3^{\frac{1}{2}}}+\frac{2}{3^{\frac{3}{2}}}=\frac{3-3-1-3^{-1}+1-3^{-1}}{3^{\frac{1}{2}}}+\frac{2}{3^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=-\frac{2\cdot 3^{-1}}{3^{\frac{1}{2}}}+\frac{2}{3^{\frac{3}{2}}}=-\frac{2}{3^{\frac{3}{2}}}+\frac{2}{3^{\frac{3}{2}}}=0.$$

4. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

a) $3a^{-2}b^3(2a^2-3a^{-3}b^2+b^{-3})$

b) $(x^3y^{-2}-2x^{-1}y^2+3x^{-2}y^3):(x^{-2}y^3)$

c) $\left(\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}\right)^{-1}$

d) $\frac{x^{-1}+y^{-1}}{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^2}+\frac{2\left(x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^3}$

Megoldás:

a) A disztributivitás alkalmazhatósága miatt:
$3a^{-2}b^3(2a^2-3a^{-3}b^2+b^{-3})=6b^3-9a^{-5}b^5+3a^{-2}$.

b) **Első megoldás:** Az osztandót szorozzuk az osztó reciprokával:
$(x^3y^{-2}-2x^{-1}y^2+3x^{-2}y^3):(x^{-2}y^3)=(x^3y^{-2}-2x^{-1}y^2+3x^{-2}y^3)\cdot(x^{-2}y^3)^{-1}=$
$=(x^3y^{-2}-2x^{-1}y^2+3x^{-2}y^3)\cdot(x^2y^{-3})=x^5y^{-5}-2xy^{-1}+3.$

Második megoldás: A többtagú kifejezés minden egyes tagját elosztjuk az osztóval.

$$(x^3y^{-2}-2x^{-1}y^2+3x^{-2}y^3):(x^{-2}y^3)=\frac{x^3y^{-2}}{x^{-2}y^3}-\frac{2x^{-1}y^2}{x^{-2}y^3}+\frac{3x^{-2}y^3}{x^{-2}y^3}=$$

$$=x^5y^{-5}-2xy^{-1}+3.$$

c) Alkalmazzuk, hogy $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$, valamint az $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ azonosságot!

$$\left(\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}\right)^{-1}=\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}=\frac{x^{-1}+y^{-1}}{(x^{-1}+y^{-1})(x^{-1}-y^{-1})}=(x^{-1}-y^{-1})^{-1},$$

ennek negatív kitevő mentes alakja:

$$(x^{-1}-y^{-1})^{-1}=\frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=\frac{xy}{y-x}.$$

d) Először pozitív kitevőkre térünk át és a megfelelő helyen alkalmazzuk az $a^{-1}+b^{-1}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$ átalakítást.

$$\frac{x^{-1}+y^{-1}}{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^2}+\frac{2\left(x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^3}=\frac{\frac{x+y}{xy}}{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^2}+\frac{2\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^3}=$$

$$=\frac{x+y}{xy\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^2}+\frac{2\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^3}=\frac{x+y+2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}}{xy\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^2}=\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^2}{xy\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^2}=\frac{1}{xy}.$$

5. Végezze el normálalak használatával a következő számításokat!

a) $\frac{160000}{0{,}004}\cdot 0{,}0000125$ b) $\frac{1250000\cdot(0{,}000002)^3}{0{,}0004+0{,}000005}$

Megoldás:

a)

$$\frac{160000}{0{,}004}\cdot 0{,}0000125=\frac{1{,}6\cdot 10^5\cdot 1{,}25\cdot 10^{-5}}{4\cdot 10^{-3}}=\frac{1{,}6\cdot 1{,}25}{4}\cdot 10^3=0{,}4\cdot 1{,}25\cdot 10^3=$$

$$=0{,}5\cdot 10^3=5\cdot 10^2=500.$$

b)

$$\frac{1250000\cdot(0{,}000002)^3}{0{,}0004+0{,}000005}=\frac{1{,}25\cdot 10^6\cdot(2\cdot 10^{-6})^3}{4\cdot 10^{-4}+5\cdot 10^{-6}}=\frac{1{,}25\cdot 10^6\cdot 8\cdot 10^{-18}}{400\cdot 10^{-6}+5\cdot 10^{-6}}=$$

$$=\frac{10\cdot 10^6\cdot 10^{-18}}{400\cdot 10^{-6}+5\cdot 10^{-6}}=\frac{10^{-11}}{405\cdot 10^{-6}}=\frac{10^{-11}}{4{,}05\cdot 10^{-4}}=\frac{1}{4{,}05}\cdot 10^{-7}\approx$$

$$\approx 0{,}2469\cdot 10^{-7}=2{,}469\cdot 10^{-8}.$$

6. Adja meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen értelmezhető az alábbi kifejezés!

$$\sqrt[4]{x^4-5x^2+4}$$

Megoldás:

Páros gyökkitevő esetén a gyökvonást csak nemnegatív számok esetén értelmezzük. Ezért

$$x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0.$$

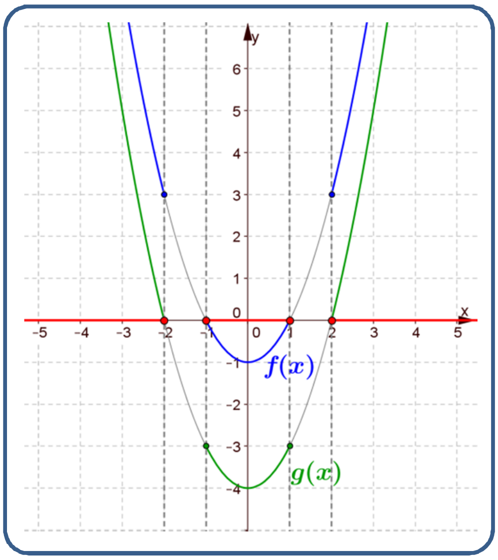
A bal oldalt szorzattá alakítva:

$$x^4 - x^2 - 4x^2 + 4 = x^2(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^2 - 4).$$

Így az egyenlőtlenség alakja:

$$(x^2 - 1)(x^2 - 4) \geq 0.$$

Ez az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha a két összeszorzott másodfokú polinom egyszerre nemnegatív, vagy egyszerre nempozitív. Az $f(x) = x^2 - 1$ és a $g(x) = x^2 - 4$ függvények grafikonja felfelé nyíló parabola, mert az x^2 együtthatói pozitívak. $f(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, így gyökei $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$. $g(x) = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, gyökei $x_3 = 2$ és $x_4 = -2$.



A grafikon alapján megadható az értelmezési tartomány: $D =]-\infty; -2] \cup [-1; 1] \cup [2; \infty[$.

7. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést!

$$x + \sqrt[4]{(x-1)^4}$$

Megoldás:

$$x + \sqrt[4]{(x-1)^4} = x + |x - 1| = \begin{cases} 2x - 1, & \text{ha } x \geq 1 \\ -1, & \text{ha } x < 1. \end{cases}$$

8. Gyöktelenítse a következő törtek nevezőit!

a) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ c) $\frac{3}{\sqrt{3\sqrt{3}}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ f) $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

g) $\frac{1}{\sqrt[5]{\sqrt{3}+1}}$ h) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$ i) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}}$

Megoldás:

a) $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2}=3(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

c) $\frac{3}{\sqrt{3\sqrt{3}}}=\frac{3}{\sqrt{3\sqrt{3}}}\cdot\frac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{\sqrt{3\sqrt{3}}}=\frac{3\sqrt{3\sqrt{3}}}{3\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3\sqrt{3}}}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{9\sqrt{3}}}{9}=\frac{9\sqrt[4]{3}}{9}=\sqrt[4]{3}$

d) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2}}=\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}\cdot\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2+2\sqrt{6}+3-5}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=$

$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})\sqrt{6}}{12}$

f) $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}})}{2-(2-\sqrt{3})}=\frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}})}{\sqrt{3}}=$

$=\frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}})}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}})}{3}$

g) $\frac{1}{\sqrt[5]{\sqrt{3}+1}}=\frac{1}{\sqrt[5]{\sqrt{3}+1}}\cdot\frac{\sqrt[5]{(\sqrt{3}+1)^4}}{\sqrt[5]{(\sqrt{3}+1)^4}}=\frac{\sqrt[5]{(\sqrt{3}+1)^4}}{\sqrt[5]{(\sqrt{3}+1)^5}}=\frac{\sqrt[5]{(\sqrt{3}+1)^4}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt[5]{(\sqrt{3}+1)^4}}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt[5]{(\sqrt{3}+1)^4}}{2}$

h) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2^2}}=\frac{\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2^2}}{3+2}=\frac{\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2^2}}{5}$

i) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{\sqrt[4]{4^3}+\sqrt[4]{4^2}\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{4}\sqrt[4]{3^2}+\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{4^3}+\sqrt[4]{4^2}\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{4}\sqrt[4]{3^2}+\sqrt[4]{3^3}}=\frac{\sqrt[4]{4^3}+\sqrt[4]{4^2}\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{4}\sqrt[4]{3^2}+\sqrt[4]{3^3}}{4-3}=$

$\sqrt[4]{4^3}+\sqrt[4]{4^2}\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{4}\sqrt[4]{3^2}+\sqrt[4]{3^3}$

9. Határozza meg a következő kifejezés pontos értékét!

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

Megoldás:

Gyöktelenítsük az összeg mindegyik tagját!

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3}+\cdots+\frac{\sqrt{99}-\sqrt{98}}{99-98}+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{100-99}=$$

$$=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{99}-\sqrt{98}+\sqrt{100}-\sqrt{99}=\sqrt{100}-\sqrt{1}=9$$

A $\sqrt{100}$ és a $(-\sqrt{1})$ kivételével mindegyik tagnak az ellentettje is szerepel az összegben, így azok nullára összegződnek.

10. Igazolja, hogy az alábbi kifejezések értéke egész szám!

a) $\left(\sqrt{16+2\sqrt{55}}-\sqrt{16-\sqrt{220}}\right)^2$ b) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

c) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ d) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^3-\left(\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right)^3$

Megoldás:

a) Az $(a-b)^2$-re vonatkozó nevezetes azonosságot alkalmazva:

$$\left(\sqrt{16+2\sqrt{55}}-\sqrt{16-\sqrt{220}}\right)^2=16+2\sqrt{55}-2\sqrt{\left(16+2\sqrt{55}\right)\left(16-2\sqrt{55}\right)}+16-2\sqrt{55}.$$

Ez összevonás után: $32-2\sqrt{256-220}=32-2\sqrt{36}=20$, ami egész szám.

b) A külső négyzetgyökök alatt teljes négyzetek állnak.

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{2^2+2\cdot 2\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{4-2\cdot 2\sqrt{3}+3}=$$

$=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\left|2+\sqrt{3}\right|+\left|2-\sqrt{3}\right|=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$, ami egész szám.

c) A köbgyökök alatti kifejezések teljes köbök.

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=$$

$$=\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}\right)^3+3\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot 1+3\sqrt{2}\cdot 1^2+1}-\sqrt[3]{2\sqrt{2}-3\cdot 2+3\sqrt{2}-1}=$$

$=\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^3}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)^3}=\sqrt{2}+1-\left(\sqrt{2}-1\right)=2$, ami egész szám.

d) Gyöktelenítsük a zárójelekben szereplő törtek nevezőit!

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^3-\left(\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right)^3=\left(\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^3-\left(\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right)^3=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{5}+2}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}\right)^3-\left(\frac{\sqrt{5}-2}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}\right)^3=\left(\sqrt{5}+2\right)^3-\left(\sqrt{5}-2\right)^3=$$

$=5\sqrt{5}+3\cdot 5\cdot 2+3\cdot\sqrt{5}\cdot 4+8-\left(5\sqrt{5}-3\cdot 5\cdot 2+3\cdot\sqrt{5}\cdot 4-8\right)=76$, ami egész szám.

11. Írja fel egyetlen gyökjel segítségével a következő kifejezést!

a) $\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ b) $\sqrt[6]{\frac{3x}{y^2}}:\sqrt[4]{\frac{x^2}{y}}$ c) $\sqrt{x\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x^3}}}$

Megoldás:

a) Különböző gyökkitevők szerepelnek, így nem alkalmazható az $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$ azonosság. Az alkalmazhatósághoz közös gyökkitevőt alakítunk ki. Az előforduló gyökkitevők legkisebb közös többszörösét célszerű új gyökkitevőnek választani.

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{2}}=\sqrt[12]{\left(\frac{3}{2}\right)^6}\cdot\sqrt[12]{\left(\frac{2}{3}\right)^4}\cdot\sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\sqrt[12]{\frac{3^6\cdot 2^4}{2^6\cdot 3^4\cdot 2^3}}=\sqrt[12]{\frac{3^2}{2^5}}.$$

b) $\sqrt[6]{\frac{3x}{y^2}}:\sqrt[4]{\frac{x^2}{y}}=\sqrt[12]{\left(\frac{3x}{y^2}\right)^2}:\sqrt[12]{\left(\frac{x^2}{y}\right)^3}=\sqrt[12]{\frac{3^2x^2}{y^4}\cdot\frac{y^3}{x^6}}=\sqrt[12]{\frac{9}{x^4y}}$

c) $\sqrt{x\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x^3}}}=\sqrt{x\sqrt[3]{\sqrt[4]{(x^2)^4x^3}}}=\sqrt{x\sqrt[12]{x^{11}}}=\sqrt{\sqrt[12]{x^{12}x^{11}}}=\sqrt[24]{x^{23}}$

12. Legyen $A=\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a^3}}$, $B=\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a}$ és $C=\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[3]{a}}$, ahol $a>0$!

a) Rendezze csökkenő sorrendbe az A, B és C kifejezéseket!

b) Írja fel törtkitevők segítségével az A, B és C kifejezéseket, majd számítsa ki az $A\cdot B\cdot C$ kifejezést!

Megoldás:

a) Összehasonlítható formát kapunk, ha közös gyökkitevőt alakítunk ki.

$$A=\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a^3}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{(a^2)^4a^3}}=\sqrt[12]{a^{11}}$$

$$B=\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a}=\sqrt[12]{(a^2)^4}\cdot\sqrt[12]{a^3}=\sqrt[12]{a^8a^3}=\sqrt[12]{a^{11}}$$

$$C=\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[3]{a}}=\frac{\sqrt[12]{(a^3)^3}}{\sqrt[12]{a^4}}=\sqrt[12]{\frac{a^9}{a^4}}=\sqrt[12]{a^5}$$

- Ha $a>1$, akkor a csökkenő sorrend: $A=B<C$.
- Ha $a=1$, akkor $A=B=C=1$.
- Ha $0<a<1$, akkor a csökkenő sorrend: $C>B=A$.

b)

$$A=\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a^3}}=\left[a^2\cdot a^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}=a^{\frac{11}{12}}$$

$$B=\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a}=a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}=a^{\frac{11}{12}}$$

$$C=\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[3]{a}}=\frac{a^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}=a^{\frac{5}{12}}$$

$$A\cdot B\cdot \mathrm{C}=a^{\frac{11}{12}}\cdot a^{\frac{11}{12}}\cdot a^{\frac{5}{12}}=a^{\frac{27}{12}}$$

13. Igazolja a következő azonosságot, valamint írja át törtkitevő mentes alakba!

$$\left(x+y^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{x+(x^2-y)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{x-(x^2-y)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

ahol $x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2\geq y$.

Megoldás:

A bizonyítandó egyenlőség mindkét oldalán nemnegatív kifejezések állnak, ezért a négyzetük egyenlőségének bizonyítása az eredeti egyenlőség helyességét igazolja.

A jobb oldal négyzete:

$$\frac{x+(x^2-y)^{\frac{1}{2}}}{2}+2\cdot\left[\frac{x+(x^2-y)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\frac{x-(x^2-y)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}+\frac{x-(x^2-y)^{\frac{1}{2}}}{2}=$$

$$=x+2\cdot\left[\frac{x+(x^2-y)^{\frac{1}{2}}}{2}\cdot\frac{x-(x^2-y)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}=x+2\cdot\left[\frac{x^2-(x^2-y)}{4}\right]^{\frac{1}{2}}=x+2\left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=x+y^{\frac{1}{2}},$$

ami a bal oldalon álló kifejezés négyzete, tehát igaz a bizonyítandó egyenlőség.

A törtkitevő mentes alak:

$$\sqrt{x+\sqrt{y}}=\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}}+\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}}.$$

14. Hozza egyszerűbb alakra! ($a > b > 0$)

$$4a\sqrt{\frac{(a-\sqrt{b})(a^2-b^2)}{a^2-b}}\cdot\frac{\sqrt{a+\sqrt{b}}}{\left(a+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right)^2-\left(a-\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right)^2}$$

Megoldás:

$$4a\sqrt{\frac{(a-\sqrt{b})(a^2-b^2)}{a^2-b}}\cdot\frac{\sqrt{a+\sqrt{b}}}{\left(a+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right)^2-\left(a-\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right)^2}=$$

$$=4a\sqrt{\frac{(a-\sqrt{b})(a^2-b^2)}{(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})}}\cdot\frac{\sqrt{a+\sqrt{b}}}{a^2+2a\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+\frac{a-b}{a+b}-a^2+2a\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}-\frac{a-b}{a+b}}=$$

$$=4a\sqrt{\frac{(a^2-b^2)}{(a+\sqrt{b})}}\cdot\frac{\sqrt{a+\sqrt{b}}}{4a\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}}=\sqrt{\frac{(a^2-b^2)(a+b)}{a-b}}=\sqrt{\frac{(a-b)(a+b)(a+b)}{a-b}}=\sqrt{(a+b)^2}=$$

$$=|a+b|=a+b$$

15. Igazolja a következő egyenlőséget!

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}=\frac{3\sqrt[3]{ab}}{a+b}$$

Megoldás:

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}=\frac{\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^2-\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}{\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)}=$$

$$=\frac{a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a+b}=\frac{3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a+b}=\frac{3\sqrt[3]{ab}}{a+b}$$

16. Határozza meg a következő kifejezés pontos értékét!

$$\left(\sqrt[6]{28+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{27}+\frac{\sqrt{3}}{9}}\right)\cdot\sqrt[3]{3\sqrt{3}-1}$$

Megoldás:

$$\left(\sqrt[6]{28+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{27}+\frac{\sqrt{3}}{9}}\right)\cdot\sqrt[3]{3\sqrt{3}-1}=\left(\sqrt[6]{\left(3\sqrt{3}\right)^2+2\cdot 3\sqrt{3}+1}+\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}+1}{27}}\right)\cdot\sqrt[3]{3\sqrt{3}-1}=$$

$$=\left[\sqrt[6]{\left(3\sqrt{3}+1\right)^2}+\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}+1}}{3}\right]\cdot\sqrt[3]{3\sqrt{3}-1}=\left(\sqrt[3]{3\sqrt{3}+1}+\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}+1}}{3}\right)\sqrt[3]{3\sqrt{3}-1}=$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\left(\sqrt[3]{3\sqrt{3}+1}\right)\sqrt[3]{3\sqrt{3}-1}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{\left(3\sqrt{3}\right)^2-1}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{26}$$

17. Igazolja, hogy $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$, ha $ax^3=by^3=cz^3$ és $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$!

Megoldás:

Legyen $k=ax^3=by^3=cz^3$.

A $k=ax^3$ egyenlőségből $\sqrt[3]{a}=\frac{\sqrt[3]{k}}{x}$ következik. Hasonlóan $\sqrt[3]{b}=\frac{\sqrt[3]{k}}{y}$ és $\sqrt[3]{c}=\frac{\sqrt[3]{k}}{z}$.

A bizonyítandó egyenlőség jobb oldala: $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{k}\underbrace{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}_{1}=\sqrt[3]{k}$.

A $k=ax^3$ egyenlőségből $ax^2=\frac{k}{x}$. Hasonlóan $by^2=\frac{k}{y}$, és $cz^2=\frac{k}{z}$.

A bizonyítandó egyenlőség bal oldala: $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{k\underbrace{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}_{1}}=\sqrt[3]{k}$.

Mivel mindkét oldal esetében eredményül $\sqrt[3]{k}$-t kaptuk, bebizonyítottuk az állítást.

III. Ajánlott feladatok

1. Végezze el a kijelölt műveleteket!

a) $\frac{125^{-\frac{1}{3}}\sqrt[3]{1000}(0,1)^{-1}\left(-\sqrt[3]{3}\right)^3}{(-2)^2}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$ b) $\frac{4^{-\frac{1}{2}}+8^{\frac{2}{3}}}{64^{-\frac{5}{6}}}$ c) $\left\{p^2\left[p\left(p^3p^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{5}}\right\}^{\frac{1}{3}}$

d) $\frac{\left(a^{-0,5}b^{1,5}\right)^{-3}}{(a^{0,2}b^{-0,1})^6\cdot(a^{-0,3}b^2)^{-5}}$ e) $\left(\frac{3x^3y^4}{4r^3s^2}\right)^3:\left(\frac{x^2y^3}{2r^2s}\right)^2$ f) $\left[\left(a^{\sin\frac{\pi}{3}}\right)^{\frac{8}{\sqrt{6}}}\right]^{\cos\frac{3\pi}{4}}$

2. Melyik a nagyobb?

a) 3^{500} vagy 5^{300}? b) $2^{\sqrt{3}}$ vagy $3^{\sqrt{2}}$?

c) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ vagy $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ d) $\sqrt{5}-2$ vagy $\left(\sqrt{5}+2\right)^{-1}$?

e) $\sqrt{a^5\cdot\sqrt[5]{a^2}}$ vagy $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[5]{a}}$? $(a>0)$ f) $\frac{10^{2012}+1}{10^{2013}+1}$ vagy $\frac{10^{2013}+1}{10^{2014}+1}$?

3. Adja meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen értelmezhető a következő kifejezés!

$$\sqrt{\frac{x^2+2x-3}{-x^2+4x+12}}$$

4. Határozza meg a következő kifejezések értékét!

a) $\frac{(4+\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}+(4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6+\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}-(6-\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}$ b) $\frac{\sqrt{7-\sqrt{21+\sqrt{80}}}}{1+\sqrt{7+\sqrt{48}}-\sqrt{4-\sqrt{12}}}$

5. Határozza meg a következő kifejezés értékét!

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

6. Igazolja, hogy

$$\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+1\right)!$$

7. Számítsa ki a hidrogén atomban az $n=2$ főkvantumszámú elektronpályán lévő elektron kötési energiáját, ha azt a következő összefüggés adja meg!

$$E(n)=-\left(\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}\right)\cdot\frac{1}{n^2}$$

A képletben szereplő állandók értékei:

$m=9{,}1\cdot10^{-31}\ kg$ az elektron tömege	$\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}\ \frac{As}{Vm}$ a vákuum permittivitása
$e=\ 1{,}602\ \cdot10^{-19}\ C$ az elektron töltése	$h=6{,}626\cdot10^{-34}\ Js$ a Planck-állandó

8. Hányszorosa a két elektron között fellépő elektromos taszítóerő a gravitációs vonzóerőnek vákuumban, ha az elektromos taszítóerőt a Coulomb-törvény segítségével, a gravitációs vonzóerő nagyságát pedig a Newton-féle gravitációs erőtörvénnyel adjuk meg?

Coulomb-törvény	Newton-féle gravitációs erőtörvény
$F=k\cdot\frac{q_1q_2}{r^2}$	$F=\gamma\cdot\frac{m_1m_2}{r^2}$
q_1,q_2: a két ponttöltés nagysága	m_1,m_2: a két tömegpont tömege
r: a két ponttöltés távolsága	r: a két tömegpont távolsága
$k=9\cdot10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}$	$\gamma=6{,}662\cdot10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$, a gravitációs állandó
$e=1{,}602\cdot10^{-19}\ C$ az elektron töltése	$m_e=9{,}1\cdot10^{-31}\ kg$ az elektron tömege

9. Gyöktelenítse a következő törtek nevezőit!

a) $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$ c) $\frac{2}{\sqrt{3\sqrt{5}}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{2}}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z}}$ f) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-\sqrt{b}}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-\sqrt{b}}}$

g) $\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{x}-2}}$ h) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2}}$ i) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{y}}$

10. Határozza meg a következő összeg értékét!

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{10000\sqrt{9999}+9999\sqrt{10000}}$$

11. Írja fel egyetlen gyökjel segítségével a következő kifejezéseket!

a) $\sqrt{\frac{a}{b^3}}\cdot\sqrt[5]{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^5}}:\sqrt[5]{\frac{y^4}{3x^3}}$ c) $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt[5]{\left(\frac{a}{b}\right)^2\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a^3}\right)^2}}}$

d) $\sqrt[n]{\frac{x^{2n+1}}{y^{n+2}}}:\sqrt[n]{\frac{x^{n+1}}{y^{n-1}}}$ e) $\sqrt[k]{x^{n+1}\sqrt[k-1]{x^{n+1}}}$

12. Írja át negatív-, illetve törtkitevőjű hatványok alkalmazásával, tört- és gyökmentes alakra a 11. feladatban szereplő kifejezéseket, majd hozza egyszerűbb alakra őket!

13. Végezze el a kijelölt műveleteket!

a) $\left(2\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{8}-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt[5]{16}$

b) $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}\right):\sqrt[6]{x^5}$

c) $\left(x^{\frac{3}{5}}+1\right)^2-\left(x^{\frac{2}{5}}+1\right)\left(x^{\frac{4}{5}}-x^{\frac{2}{5}}+1\right)$

14. Igazolja, hogy az alábbi kifejezések értéke egész szám!

a) $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$ b) $\sqrt{7+\sqrt{13}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{13}}$

c) $\sqrt[3]{8\sqrt{5}+16}-\sqrt[3]{8\sqrt{5}-16}$ d) $\sqrt[4]{28+16\sqrt{3}}-\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$

15. Igazolja a következő egyenlőséget!

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right)^2\cdot\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}-1}+\frac{a^{\frac{1}{2}}-1}{a^{\frac{1}{2}}+1}-\frac{4}{a-1}\right)^{-1}=\frac{8ab}{(a-b)^2}$$

16. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést!

$$\left[\frac{\left(\sqrt[3]{ab^2\sqrt{b}}-\sqrt[3]{ab\sqrt{a}}\right)^2}{\sqrt[6]{a^7b^7}}+4\right]\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}$$

Az ajánlott feladatok megoldásai

1. Végezze el a kijelölt műveleteket!

a) $\dfrac{125^{-\frac{1}{3}}\sqrt[3]{1000}(0,1)^{-1}\left(-\sqrt[3]{3}\right)^3}{(-2)^2}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$ b) $\dfrac{4^{-\frac{1}{2}}+8^{\frac{2}{3}}}{64^{-\frac{5}{6}}}$ c) $\left\{p^2\left[p\left(p^3p^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{5}}\right\}^{\frac{1}{3}}$

d) $\dfrac{\left(a^{-0,5}b^{1,5}\right)^{-3}}{(a^{0,2}b^{-0,1})^6\cdot(a^{-0,3}b^2)^{-5}}$ e) $\left(\frac{3x^3y^4}{4r^3s^2}\right)^3:\left(\frac{x^2y^3}{2r^2s}\right)^2$ f) $\left[\left(a^{\sin\frac{\pi}{3}}\right)^{\frac{8}{\sqrt{6}}}\right]^{\cos\frac{3\pi}{4}}$

Megoldás:

a) $-22,5$ b) 144 c) $p^{\frac{19}{24}}$

d) $a^{-1,2}b^{6,1}$ e) $\dfrac{27x^5y^6}{16r^5s^4}$ f) a^{-2}

2. Melyik a nagyobb?

a) 3^{500} vagy 5^{300}?   b) $2^{\sqrt{3}}$ vagy $3^{\sqrt{2}}$?

c) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ vagy $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ d) $\sqrt{5}-2$ vagy $\left(\sqrt{5}+2\right)^{-1}$?

e) $\sqrt{a^5\cdot\sqrt[5]{a^2}}$ vagy $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[5]{a}}$? $(a>0)$ f) $\frac{10^{2012}+1}{10^{2013}+1}$ vagy $\frac{10^{2013}+1}{10^{2014}+1}$?

Megoldás:

a) Közös hatványkitevőt kialakítva: $3^{500}=(3^5)^{100}=243^{100}$; $5^{300}=(5^3)^{100}=125^{100}$. Tehát $3^{500}>5^{300}$.

b) Olyan alakra hozzuk a két hatványt, melyben az egyik hatvány alapja és kitevője is kisebb lesz a másikénál. Emeljük mindkét hatványt a $\sqrt{2\cdot3}=\sqrt{6}$ kitevőre! Ez nem változtat a nagyságok közötti reláción. $\left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2\cdot3}}=(2^3)^{\sqrt{2}}=8^{\sqrt{2}}$, valamint $\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2\cdot3}}=(3^2)^{\sqrt{3}}=9^{\sqrt{3}}$.
Tehát $2^{\sqrt{3}}<3^{\sqrt{2}}$.

c) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}=\left|3-\sqrt{2}\right|=3-\sqrt{2}$.
$\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}=\left|\sqrt{5}-2\right|=\sqrt{5}-2$.
A különbségük: $\sqrt{5}-2-\left(3-\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{5}-3\right)+\left(\sqrt{2}-2\right)<0$, mivel az összeg mindkét tagja negatív. Tehát $\sqrt{9-4\sqrt{5}}>\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

d) $\left(\sqrt{5}+2\right)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\frac{\sqrt{5}-2}{5-4}=\sqrt{5}-2$, tehát egyenlők.

e) $\sqrt{a^5\cdot\sqrt[5]{a^2}}=\sqrt[20]{a^{54}}$, valamint $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[5]{a}}=\sqrt[20]{a}$.

- Ha $a>1$, akkor $\sqrt{a^5\cdot\sqrt[5]{a^2}}>\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[5]{a}}$.

- Ha $a = 1$, akkor $\sqrt{a^5 \cdot \sqrt[5]{a^2}} = \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[5]{a}}$.
- Ha $0 < a < 1$, akkor $\sqrt{a^5 \cdot \sqrt[5]{a^2}} < \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[5]{a}}$.

f) A két pozitív szám hányadosát felírva:

$$\frac{10^{2012}+1}{10^{2013}+1} : \frac{10^{2013}+1}{10^{2014}+1} = \frac{(10^{2012}+1)(10^{2014}+1)}{(10^{2013}+1)(10^{2013}+1)} = \frac{10^{4026}+10^{2014}+10^{2012}+1}{10^{4026}+2 \cdot 10^{2013}+1}$$

A számlálóban $10^{2014} + 10^{2012} = 10^{2012}(100+1) = 101 \cdot 10^{2012}$.

A nevezőben $2 \cdot 10^{2013} = 20 \cdot 10^{2012}$.

Mivel a számláló a nagyobb, hányadosuk 1-nél nagyobb, tehát: $\frac{10^{2012}+1}{10^{2013}+1} > \frac{10^{2013}+1}{10^{2014}+1}$.

3. Adja meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen értelmezhető a következő kifejezés!

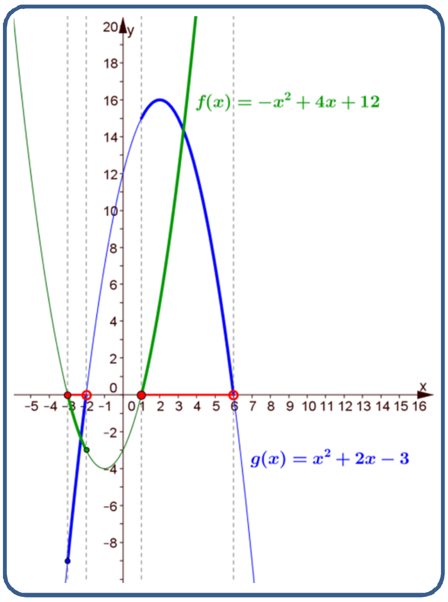
$$\sqrt{\frac{x^2+2x-3}{-x^2+4x+12}}$$

Megoldás:

Egy tört nevezője nem lehet nulla, ezért $-x^2 + 4x + 12 \neq 0$, tehát $x \neq -2; x \neq 6$. A négyzetgyökvonás csak a nemnegatív valós számok esetében értelmezett. Ezért teljesülnie kell a

$$\frac{x^2+2x-3}{-x^2+4x+12} \geq 0$$

egyenlőtlenségnek. Egy tört akkor nulla, ha a számláló nulla és akkor pozitív, ha a számláló és a nevező azonos előjelű. Az $x^2 + 2x - 3$ kifejezés zérushelyei -3 és 1. A számlálóban szereplő függvény grafikonja egy felfelé nyitott parabola, a nevező grafikonja pedig lefelé nyitott. A grafikonról a kifejezések előjele leolvasható. Az értelmezési tartomány: $D = [-3; -2[\cup [1; 6[$.



4. Határozza meg a következő kifejezések értékét!

a) $\frac{(4+\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}+(4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6+\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}-(6-\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}$ b) $\frac{\sqrt{7-\sqrt{21+\sqrt{80}}}}{1+\sqrt{7+\sqrt{48}}-\sqrt{4-\sqrt{12}}}$

Megoldás:

a) $\frac{(4+\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}+(4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6+\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}-(6-\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}=\frac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{(4+\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}+(4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6+\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}-(6-\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}=\frac{(8+2\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}+(8-2\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(12+2\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}-(12-2\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left[(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2\right]^{\frac{3}{2}}+\left[(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left[(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2\right]^{\frac{3}{2}}-\left[(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2\right]^{\frac{3}{2}}}=$

$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^3+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^3}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^3-(\sqrt{7}-\sqrt{5})^3}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3})\left[(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2\right]}{(\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{7}+\sqrt{5})\left[(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2+(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2\right]}=$

$=\frac{2\sqrt{5}(8+2\sqrt{15}-2+8-2\sqrt{15})}{2\sqrt{5}(12+2\sqrt{35}+2+12-2\sqrt{35})}=\frac{14}{26}$

b) $\frac{\sqrt{7-\sqrt{21+\sqrt{80}}}}{1+\sqrt{7+\sqrt{48}}-\sqrt{4-\sqrt{12}}}=\frac{\sqrt{7-\sqrt{(\sqrt{20}+1)^2}}}{1+\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}-\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}=\frac{\sqrt{6-\sqrt{20}}}{1+2+\sqrt{3}-\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

5. Határozza meg a következő kifejezés értékét!

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

Megoldás:

$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=$

$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{4-\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=$

$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4-(2+\sqrt{3})}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{4-3}=1$

6. Igazolja, hogy

$$\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)!$$

Megoldás:

Felhasználjuk, hogy minden $a\geq 0$ és $b\geq 0$ esetén $a=b\ \Leftrightarrow\ a^2=b^2$.
A bal oldal négyzete:

$8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}+2\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\cdot\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}=$

$16+2\sqrt{64-4(10+2\sqrt{5})}=16+2\sqrt{(\sqrt{20}-2)^2}=16+2\cdot\left|\sqrt{20}-2\right|=$

$=16+2\sqrt{20}-4=12+4\sqrt{5}=2(6+2\sqrt{5})=2(\sqrt{5}+1)^2$, ami a jobb oldal négyzete.

7. Számítsa ki a hidrogén atomban az $n=2$ főkvantumszámú elektronpályán lévő elektron kötési energiáját, ha azt a következő összefüggés adja meg!

$$E(n)=-\left(\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}\right)\cdot\frac{1}{n^2}$$

A képletben szereplő állandók értékei:

$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg$ az elektron tömege	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{As}{Vm}$ a vákuum permittivitása
$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ C$ az elektron töltése	$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ Js$ a Planck-állandó

Megoldás:

$$E(n) = -\left(\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\right)\cdot\frac{1}{n^2} = -\left(\frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot(1{,}602\cdot 10^{-19})^4}{8\cdot(8{,}85\cdot 10^{-12})^2\cdot(6{,}626\cdot 10^{-34})^2}\right)\cdot\frac{1}{4} =$$

$$= -\left(\frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 1{,}602^4\ \cdot 10^{-76}}{8\cdot 8{,}85^2\cdot 10^{-24}\cdot 6{,}626^2\cdot 10^{-68}}\right)\cdot\frac{1}{4} = -\frac{9{,}1\cdot 1{,}602^4}{8\cdot 8{,}85^2\cdot 6{,}626^2\cdot 4}\cdot 10^{-15} = -5{,}447\cdot 10^{-19} J$$

8. Hányszorosa a két elektron között fellépő elektromos taszítóerő a gravitációs vonzóerőnek vákuumban, ha az elektromos taszítóerőt a Coulomb-törvény segítségével, a gravitációs vonzóerő nagyságát pedig a Newton-féle gravitációs erőtörvénnyel adjuk meg?

Coulomb-törvény	Newton-féle gravitációs erőtörvény
$F = k\cdot\frac{q_1 q_2}{r^2}$	$F = \gamma\cdot\frac{m_1 m_2}{r^2}$
q_1, q_2: a két ponttöltés nagysága	m_1, m_2: a két tömegpont tömege
r: a két ponttöltés távolsága	r: a két tömegpont távolsága
$k = 9\cdot 10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}$	$\gamma = 6{,}662\cdot 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$, a gravitációs állandó
$e = 1{,}602\cdot 10^{-19}\ C$ az elektron töltése	$m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}\ kg$ az elektron tömege

Megoldás:

A keresett arányt az elektromos erő és a gravitációs erő hányadosa adja:

$$\frac{k\cdot\frac{q_1 q_2}{r^2}}{\gamma\cdot\frac{m_1 m_2}{r^2}} = \frac{kq_1q_2}{\gamma m_1 m_2} = \frac{ke^2}{\gamma m_e^2} = \frac{9\cdot 10^9\cdot(1{,}602\cdot 10^{-19})^2}{6{,}662\cdot 10^{-11}\cdot(9{,}1\cdot 10^{-31})^2} = \frac{9\cdot 1{,}602^2}{6{,}662\cdot 9{,}1^2}\cdot 10^{44} = 4{,}188\cdot 10^{42}.$$

9. Gyöktelenítse a következő törtek nevezőit!

a) $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$ c) $\frac{2}{\sqrt{3\sqrt{5}}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{2}}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z}}$ f) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-\sqrt{b}}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-\sqrt{b}}}$

g) $\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{x}-2}}$ h) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2}}$ i) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{y}}$

Megoldás:

a) $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{2\cdot 5} = \frac{11}{10}\sqrt{15}$

b) $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{7-2} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{5}$

c) $\frac{2}{\sqrt{3\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{3\sqrt{5}}}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}}{3\cdot 5} = \frac{2\sqrt[4]{1125}}{15}$

d) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{2})}{(\sqrt{a}+\sqrt{2})(\sqrt{a}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{2})}{a-2}$

e) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z}}=\frac{1}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})-\sqrt{z}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})+\sqrt{z}}{[(\sqrt{x}-\sqrt{y})-\sqrt{z}]\cdot[(\sqrt{x}-\sqrt{y})+\sqrt{z}]}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2-z}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}}{x+y-2\sqrt{xy}-z}=$

$=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z})\cdot[(x+y-z)+2\sqrt{xy}]}{[(x+y-z)-2\sqrt{xy}]\cdot[(x+y-z)+2\sqrt{xy}]}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z})\cdot(x+y-z+2\sqrt{xy})}{(x+y-z)^2-4xy}$

f) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-\sqrt{b}}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-\sqrt{b}}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-\sqrt{b}}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-\sqrt{b}}}\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-\sqrt{b}}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-\sqrt{b}}}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2}{a-(a-\sqrt{b})}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2}{\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2\sqrt{b}}{b}$

g) $\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{x}-2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{x}-2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{x}-2)^2}}{\sqrt[3]{(\sqrt{x}-2)^2}}=\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{x}-2)^2}}{\sqrt{x}-2}=\frac{(\sqrt{x}+2)\sqrt[3]{(\sqrt{x}-2)^2}}{x-4}$

h) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}{a-2}$

i) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{y}}=\frac{1}{\sqrt[6]{x^3}-\sqrt[6]{y^2}}=\frac{\sqrt[6]{x^{15}}+\sqrt[6]{x^{12}}\cdot\sqrt[6]{y^2}+\sqrt[6]{x^9}\cdot\sqrt[6]{y^4}+\sqrt[6]{x^6}\cdot\sqrt[6]{y^6}+\sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{y^8}+\sqrt[6]{y^{10}}}{\left(\sqrt[6]{x^3}-\sqrt[6]{y^2}\right)\left(\sqrt[6]{x^{15}}+\sqrt[6]{x^{12}}\cdot\sqrt[6]{y^2}+\sqrt[6]{x^9}\cdot\sqrt[6]{y^4}+\sqrt[6]{x^6}\cdot\sqrt[6]{y^6}+\sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{y^8}+\sqrt[6]{y^{10}}\right)}=$

$=\frac{\sqrt[6]{x^{15}}+\sqrt[6]{x^{12}}\cdot\sqrt[6]{y^2}+\sqrt[6]{x^9}\cdot\sqrt[6]{y^4}+\sqrt[6]{x^6}\cdot\sqrt[6]{y^6}+\sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{y^8}+\sqrt[6]{y^{10}}}{x^3-y^2}$

10. Határozza meg a következő összeg értékét!

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{10000\sqrt{9999}+9999\sqrt{10000}}$$

Megoldás:

Az összeg k-adik tagja: $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{(k+1)}}=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{(k+1)}}{(k+1)^2k-k^2(k+1)}=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{(k+1)}}{(k+1)[(k+1)k-k^2]}=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{(k+1)}}{(k+1)k}$.

A gyöktelenítés után olyan törtet kaptunk, amely egy k és egy $k+1$ nevezőjű tört különbségének a közös nevezőre hozás utáni alakja. $\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{(k+1)}}{(k+1)k}=\frac{\sqrt{k}}{k}-\frac{\sqrt{(k+1)}}{k+1}$. Ezt felhasználva az összeg:

$$\frac{\sqrt{1}}{1}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{4}}{4}+\cdots+\frac{\sqrt{9998}}{9998}-\frac{\sqrt{9999}}{9999}+\frac{\sqrt{9999}}{9999}-\frac{\sqrt{10000}}{10000}=1-\frac{1}{100}=0{,}99.$$

Az összeg első és utolsó tagján kívül minden tagnak az ellentettje is szerepel, így azok összege nulla. Tehát csak az első és az utolsó tag marad meg.

11. Írja fel egyetlen gyökjel segítségével a következő kifejezéseket!

a) $\sqrt{\frac{a}{b^3}}\cdot\sqrt[5]{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^5}}:\sqrt[5]{\frac{y^4}{3x^3}}$ c) $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt[5]{\left(\frac{a}{b}\right)^2\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a^3}\right)^2}}}$

d) $\sqrt[n]{\frac{x^{2n+1}}{y^{n+2}}}:\sqrt[n]{\frac{x^{n+1}}{y^{n-1}}}$ e) $\sqrt[k]{x^{n+1}\sqrt[k-1]{x^{n+1}}}$

Megoldás:

a) $\sqrt{\frac{a}{b^3}}\cdot\sqrt[5]{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}}=\sqrt[30]{\left(\frac{a}{b^3}\right)^{15}}\cdot\sqrt[30]{\left(\frac{b}{a}\right)^6}\cdot\sqrt[30]{\left(\frac{b}{a}\right)^{10}}=\sqrt[30]{\frac{a^{15}}{b^{45}}\cdot\frac{b^6}{a^6}\cdot\frac{b^{10}}{a^{10}}}=\sqrt[30]{\frac{1}{ab^{29}}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^5}}:\sqrt[5]{\frac{y^4}{3x^3}}=\sqrt[15]{\left(\frac{y^2}{x^5}\right)^5}\cdot\sqrt[15]{\left(\frac{3x^3}{y^4}\right)^3}=\sqrt[15]{\frac{y^{10}}{x^{25}}\cdot\frac{27x^9}{y^{12}}}=\sqrt[15]{\frac{27}{x^{16}y^2}}$

c) $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt[5]{\left(\frac{a}{b}\right)^2\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a^3}\right)^2}}} = \sqrt{\sqrt[5]{\left(\frac{a}{b}\right)^7\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a^3}\right)^2}}} = \sqrt[10]{\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^{21}\left(\frac{b}{a^3}\right)^2}} = \sqrt[30]{\frac{a^{15}}{b^{19}}}$

d) $\sqrt[n]{\frac{x^{2n+1}}{y^{n+2}}} : \sqrt[n]{\frac{x^{n+1}}{y^{n-1}}} = \sqrt[n]{\frac{x^{2n+1}}{y^{n+2}} \cdot \frac{y^{n-1}}{x^{n+1}}} = \sqrt[n]{\frac{x^n}{y^3}}$

e) $\sqrt[k]{x^{n+1}\sqrt[k-1]{x^{n+1}}} = \sqrt[k]{\sqrt[k-1]{x^{(n+1)(k-1)}x^{n+1}}} = \sqrt[k(k-1)]{x^{(n+1)k}} = \sqrt[(k-1)]{x^{(n+1)}}$

12. Írja át negatív-, illetve törtkitevőjű hatványok alkalmazásával, tört- és gyökmentes alakra a 11. feladatban szereplő kifejezéseket, majd hozza egyszerűbb alakra őket!

Megoldás:

a) $\sqrt{\frac{a}{b^3}} \cdot \sqrt[5]{\frac{b}{a}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = (ab^{-3})^{\frac{1}{2}} \cdot (ba^{-1})^{\frac{1}{5}} \cdot (ba^{-1})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{5}}a^{-\frac{1}{5}}b^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{3}} =$
$= a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}b^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{30}}b^{-\frac{29}{30}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^5}} : \sqrt[5]{\frac{y^4}{3x^3}} = (y^2x^{-5})^{\frac{1}{3}} \cdot (y^4 3^{-1} x^{-3})^{-\frac{1}{5}} = y^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{5}{3}}y^{-\frac{4}{5}}3^{\frac{1}{5}}x^{\frac{3}{5}} = 3^{\frac{1}{5}}x^{\frac{3}{5}-\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}-\frac{4}{5}} = 3^{\frac{1}{5}}x^{-\frac{16}{15}}y^{-\frac{2}{15}}$

c) $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt[5]{\left(\frac{a}{b}\right)^2\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a^3}\right)^2}}} = \left(ab^{-1}\left\{(ab^{-1})^2[(ba^{-3})^2]^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}\left\{(ab^{-1})^2[(ba^{-3})^2]^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{10}} =$

$= a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}(ab^{-1})^{\frac{2}{10}}[(ba^{-3})^2]^{\frac{1}{30}} = a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{2}{10}}b^{-\frac{2}{10}}b^{\frac{2}{30}}a^{-\frac{6}{30}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{10}-\frac{6}{30}}b^{-\frac{1}{2}-\frac{2}{10}+\frac{2}{30}} = a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{19}{30}}$

d) $\sqrt[n]{\frac{x^{2n+1}}{y^{n+2}}} : \sqrt[n]{\frac{x^{n+1}}{y^{n-1}}} = (x^{2n+1}y^{-n-2})^{\frac{1}{n}} \cdot (x^{n+1}y^{-n+1})^{-\frac{1}{n}} = x^{\frac{2n+1}{n}}y^{-\frac{n+2}{n}}x^{-\frac{n+1}{n}}y^{\frac{n-1}{n}} =$
$= x^{\frac{2n+1}{n}-\frac{n+1}{n}}y^{-\frac{n+2}{n}+\frac{n-1}{n}} = xy^{-\frac{3}{n}}$

e) $\sqrt[k]{x^{n+1}\sqrt[k-1]{x^{n+1}}} = \left[x^{n+1}(x^{n+1})^{\frac{1}{k-1}}\right]^{\frac{1}{k}} = x^{\frac{n+1}{k}}x^{\frac{n+1}{k(k-1)}} = x^{\frac{n+1}{k-1}}$

13. Végezze el a kijelölt műveleteket!

a) $\left(2 \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{8} - \sqrt{2}\right) \cdot \sqrt[5]{16}$

b) $\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} - \sqrt{x}\right) : \sqrt[6]{x^5}$

c) $\left(x^{\frac{3}{5}} + 1\right)^2 - \left(x^{\frac{2}{5}} + 1\right)\left(x^{\frac{4}{5}} - x^{\frac{2}{5}} + 1\right)$

Megoldás:

a) $\left(2 \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{8} - \sqrt{2}\right) \cdot \sqrt[5]{16} = 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2^4} + \sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^4} - \sqrt{2} \cdot \sqrt[5]{2^4} =$
$2 \cdot \sqrt[15]{2^{17}} + \sqrt[20]{2^{31}} - \sqrt[10]{2^{13}} = 4 \cdot \sqrt[15]{2^2} + 2 \cdot \sqrt[20]{2^{11}} - 2 \cdot \sqrt[10]{2^3}$

b) $\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} - \sqrt{x}\right) : \sqrt[6]{x^5} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x^5}} + \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x^5}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x^5}} = \sqrt[6]{\frac{x^2}{x^5}} + \sqrt[12]{\frac{x^3}{x^{10}}} - \sqrt[6]{\frac{x^3}{x^5}} = \sqrt[6]{\frac{1}{x^3}} + \sqrt[12]{\frac{1}{x^7}} - \sqrt[6]{\frac{1}{x^2}} =$
$= \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt[12]{\frac{1}{x^7}} - \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$

c) $\left(x^{\frac{3}{5}} + 1\right)^2 - \left(x^{\frac{2}{5}} + 1\right)\left(x^{\frac{4}{5}} - x^{\frac{2}{5}} + 1\right) = \left(x^{\frac{6}{5}} + 2x^{\frac{3}{5}} + 1\right) - \left(x^{\frac{6}{5}} + 1\right) = 2x^{\frac{3}{5}}$

14. Igazolja, hogy az alábbi kifejezések értéke egész szám!

a) $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$ b) $\sqrt{7+\sqrt{13}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{13}}$

c) $\sqrt[3]{8\sqrt{5}+16}-\sqrt[3]{8\sqrt{5}-16}$ d) $\sqrt[4]{28+16\sqrt{3}}-\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$

Megoldás:

a) $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2=4+\sqrt{7}-2\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{7}}+4-\sqrt{7}=8-2\sqrt{16-7}=2$

b) $\sqrt{7+\sqrt{13}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{13}}=\sqrt{49-13}=6$

c) $\sqrt[3]{8\sqrt{5}+16}-\sqrt[3]{8\sqrt{5}-16}=\sqrt[3]{5\sqrt{5}+3\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2\cdot 1+3\cdot\sqrt{5}\cdot 1^2+1}-\sqrt[3]{8\sqrt{5}-16}=$

$=\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}+1\right)^3}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}-1\right)^3}=\sqrt{5}+1-\left(\sqrt{5}-1\right)=2$

d) $\sqrt[4]{28+16\sqrt{3}}-\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}=\sqrt[4]{4\left(7+4\sqrt{3}\right)}-\sqrt[4]{4\left(7-4\sqrt{3}\right)}=$

$=\sqrt[4]{4\left(2+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt[4]{4\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{2\left(2+\sqrt{3}\right)}-\sqrt{2\left(2-\sqrt{3}\right)}=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\left|\sqrt{3}+1\right|-\left|\sqrt{3}-1\right|=2$

15. Igazolja a következő egyenlőséget!

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right)^2\cdot\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}-1}+\frac{a^{\frac{1}{2}}-1}{a^{\frac{1}{2}}+1}-\frac{4}{a-1}\right)^{-1}=\frac{8ab}{(a-b)^2}$$

Megoldás:

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right)^2\cdot\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}-1}+\frac{a^{\frac{1}{2}}-1}{a^{\frac{1}{2}}+1}-\frac{4}{a-1}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2}{a-b}\right)^2\left(\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)^2+\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)^2}{a-1}-\frac{4}{a-1}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right)^2\left(\frac{2a+2-4}{a-1}\right)^{-1}=\frac{16ab}{(a-b)^2}\cdot\left(\frac{2(a-1)}{a-1}\right)^{-1}=\frac{8ab}{(a-b)^2}$$

16. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést!

$$\left[\frac{\left(\sqrt[3]{ab^2\sqrt{b}}-\sqrt[3]{ab\sqrt{a}}\right)^2}{\sqrt[6]{a^7b^7}}+4\right]\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}$$

Megoldás:

$$\left[\frac{\left(\sqrt[3]{ab^2\sqrt{b}}-\sqrt[3]{ab\sqrt{a}}\right)^2}{\sqrt[6]{a^7b^7}}+4\right]\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}=\left[\frac{\left(\sqrt[6]{a^2b^5}-\sqrt[6]{a^5b^2}\right)^2}{\sqrt[6]{a^7b^7}}+4\right]\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}=$$

$$=\left[\frac{\left(\sqrt[6]{a^2b^2}\right)^2\left(\sqrt[6]{b^3}-\sqrt[6]{a^3}\right)^2}{\sqrt[6]{a^7b^7}}+4\right]\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}=\left[\frac{\sqrt[6]{a^4b^4}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2}{\sqrt[6]{a^7b^7}}+4\right]\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}=$$

$$=\left(\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{\sqrt[6]{a^3b^3}}+4\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{a-2\sqrt{ab}+b+4\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{ab}}\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{a-b}{ab}$$

IV. Ellenőrző feladatok

1. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést!

   a) $\frac{\left(a^{-2}\cdot b^3\right)^3\cdot\left(a^3\cdot b\right)^4}{\left(a^4\cdot b^{-2}\right)^2}$ b) $\frac{\left(4x^4y^2\right)^3}{\left(3x^5y^3\right)^4}:\frac{\left(2x^2y\right)^5}{\left(3xy^4\right)^3}$

2. Közelítő értékek használata nélkül döntse el, hogy melyik kifejezés nagyobb:

$$\frac{0{,}04^{-2}\cdot 125^3\cdot 0{,}2^{-1}}{4\cdot 25^6}\quad\text{vagy}\quad\frac{3^{-12}\cdot 7^{-5}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{21}\right)^8\cdot 49}\ !$$

3. Hozza egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

   a) $3x^2(x+x^{-1}-2x^{-2})$ b) $(a^{-2}+2b^2)(a^{-4}-2a^{-2}b^2+4b^4)$

   c) $(x^2y^{-3}+5x^3y^{-1}-x^4):(x^2y^{-1})$ d) $(a^{-1}b^2-a^2b^{-1}):(a^{-3}-b^{-3})$

4. Írja fel a következő mennyiségeket normálalak segítségével!

   a) a Föld és a Jupiter bolygó legkisebb távolsága: 591 000 000 km;
   b) a fény sebessége: 299 792 458 m/s
   c) a gravitációs állandó: 0,000 000 000 06673 $\mathrm{m^3/(kg\cdot s^2)}$

5. Mely valós számokra értelmezhető az alábbi kifejezés?

$$\sqrt{\frac{-x^2+8x-15}{x^2-6x+8}}\ ?$$

6. Közelítő értékek használata nélkül számítsa ki következő kifejezések értékét!

   a) $\sqrt{28-10\sqrt{3}}-\sqrt{28+10\sqrt{3}}$

   b) $\sqrt[3]{6+3\cdot\sqrt[3]{5}+3\cdot\sqrt[3]{25}}-\sqrt[3]{13+12\cdot\sqrt[3]{5}+6\cdot\sqrt[3]{25}}$

7. Gyöktelenítse a törtek nevezőjét!

a) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ b) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ c) $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+\sqrt{3}}$

d) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$ e) $\frac{3}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4}}$ f) $\frac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

8. Számolja ki a kifejezés pontos értékét!

$$\left(\left(128^{\frac{3}{7}}\cdot 27^{\frac{1}{3}}\cdot 48^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(ctg\frac{2\pi}{3}\right)^{-1}\right)^{2}+2\sqrt{6}$$

9. Írja fel a gyökös kifejezéseket törtkitevő használatával!

a) $\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}$ b) $\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^5}$ c) $\frac{a\cdot\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^5}}$

10. Bizonyítsa be, hogy ha $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, akkor

$$\sqrt[3]{a^2x}+\sqrt[3]{b^2y}+\sqrt[3]{c^2z}=\sqrt[3]{(a+b+c)^2(x+y+z)}!$$

Az ellenőrző feladatok megoldásai

1. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést!

a) $\frac{(a^{-2}\cdot b^3)^3\cdot(a^3\cdot b)^4}{(a^4\cdot b^{-2})^2}$ b) $\frac{(4x^4y^2)^3}{(3x^5y^3)^4}:\frac{(2x^2y)^5}{(3xy^4)^3}$

Megoldás:

a) $\frac{(a^{-2}\cdot b^3)^3\cdot(a^3\cdot b)^4}{(a^4\cdot b^{-2})^2}=\frac{a^{-6}\cdot b^9\cdot a^{12}\cdot b^4}{a^8\cdot b^{-4}}=\frac{a^6\cdot b^{13}}{a^8\cdot b^{-4}}=a^{-2}\cdot b^{17}.$

b) $\frac{(4x^4y^2)^3}{(3x^5y^3)^4}:\frac{(2x^2y)^5}{(3xy^4)^3}=\frac{2^6\cdot x^{12}y^6}{3^4\cdot x^{20}y^{12}}\cdot\frac{3^3\cdot x^3y^{12}}{2^5\cdot x^{10}\cdot y^5}=\frac{2y}{3x^{15}}.$

2. Közelítő értékek használata nélkül döntse el, hogy melyik kifejezés nagyobb:

$$\frac{0{,}04^{-2}\cdot 125^3\cdot 0{,}2^{-1}}{4\cdot 25^6}\quad\text{vagy}\quad\frac{3^{-12}\cdot 7^{-5}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{21}\right)^{8}\cdot 49}\ !$$

Megoldás:

A kifejezésekben szereplő számokat prímszámok hatványaiként írjuk fel és ezután egyszerűbb alakra hozzuk:

$$\frac{0{,}04^{-2}\cdot 125^3\cdot 0{,}2^{-1}}{4\cdot 25^6}=\frac{\left(\frac{1}{5^2}\right)^{-2}\cdot(5^3)^3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}{2^2\cdot(5^2)^6}=\frac{5^4\cdot 5^9\cdot 5}{2^2\cdot 5^{12}}=\frac{5^2}{2^2}=6{,}25$$

$$\frac{3^{-12}\cdot 7^{-5}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{21}\right)^{8}\cdot 49}=\frac{3^{-12}\cdot 7^{-5}\left(\frac{1}{3^2}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{3\cdot 7}\right)^{8}\cdot 7^2}=\frac{3^{-12}\cdot 7^{-5}\cdot 3^4}{3^{-8}\cdot 7^{-8}\cdot 7^2}=7$$

Ezek alapján a második kifejezés a nagyobb.

3. Hozza egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

a) $3x^2(x+x^{-1}-2x^{-2})$ b) $(a^{-2}+2b^2)(a^{-4}-2a^{-2}b^2+4b^4)$

c) $(x^2y^{-3}+5x^3y^{-1}-x^4):(x^2y^{-1})$ d) $(a^{-1}b^2-a^2b^{-1}):(a^{-3}-b^{-3})$

Megoldás:

a) $3x^2(x+x^{-1}-2x^{-2})=3x^3+3x-6$

b) $(a^{-2}+2b^2)(a^{-4}-2a^{-2}b^2+4b^4)=(a^{-2})^3+(2b^2)^3=a^{-6}+8b^6$

c) $(x^2y^{-3}+5x^3y^{-1}-x^4):(x^2y^{-1})=y^{-2}+5x-x^2y$

d) $(a^{-1}b^2-a^2b^{-1}):(a^{-3}-b^{-3})=a^2b^2(a^{-3}-b^{-3}):(a^{-3}-b^{-3})=a^2b^2$

4. Írja fel a következő mennyiségeket normálalak segítségével!

a) a Föld és a Jupiter bolygó legkisebb távolsága: 591 000 000 km;
b) a fény sebessége: 299 792 458 m/s
c) a gravitációs állandó: 0,000 000 000 06673 $\mathrm{m^3/(kg\cdot s^2)}$

Megoldás:

a) $5{,}91\cdot 10^8$km b) $2{,}99792458\cdot 10^8$ m/s c) $6{,}673\cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg\cdot s^2)}$

5. Mely valós számokra értelmezhető az alábbi kifejezés

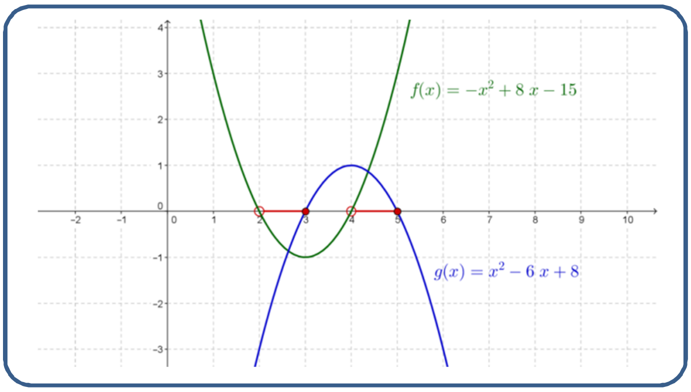
$$\sqrt{\frac{-x^2+8x-15}{x^2-6x+8}}?$$

Megoldás:

Egy tört nevezője nem lehet nulla, ezért $x^2-6x+8\neq 0$, tehát $x\neq 2; x\neq 4$. Csak nemnegatív számnak van négyzetgyöke, ezért

$$\frac{-x^2+8x-15}{x^2-6x+8}\geq 0.$$

Egy tört akkor nulla, ha a számláló nulla és akkor pozitív, ha a számláló és a nevező azonos előjelű. Az $-x^2+8x-15$ kifejezés zérushelyei 3 és 5. A számlálóban szereplő függvény grafikonja egy lefelé nyitott parabola, a nevező grafikonja pedig felfelé nyitott. A grafikonról a kifejezések előjele



leolvasható. Így a kifejezés akkor értelmezhető, ha $2<x\leq 3$ vagy $4<x\leq 5$.

6. Közelítő értékek használata nélkül számítsa ki következő kifejezések értékét!

a) $\sqrt{28-10\sqrt{3}}-\sqrt{28+10\sqrt{3}}$

b) $\sqrt[3]{6+3\cdot\sqrt[3]{5}+3\cdot\sqrt[3]{25}}-\sqrt[3]{13+12\cdot\sqrt[3]{5}+6\cdot\sqrt[3]{25}}$

Megoldás:

a) $\sqrt{28-10\sqrt{3}}-\sqrt{28+10\sqrt{3}}=\sqrt{3-2\sqrt{3}\cdot 5+25}-\sqrt{3+2\sqrt{3}\cdot 5+25}=$
$=\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}+5\right)^2}=\left|\sqrt{3}-5\right|-\left|\sqrt{3}+5\right|=5-\sqrt{3}+5+\sqrt{3}=10.$

b) $\sqrt[3]{6+3\cdot\sqrt[3]{5}+3\cdot\sqrt[3]{25}}-\sqrt[3]{13+12\cdot\sqrt[3]{5}+6\cdot\sqrt[3]{25}}=$
$=\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3+3\cdot\left(\sqrt[3]{5}\right)^2+3\cdot\sqrt[3]{5}\cdot+1}-\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3+3\cdot\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\cdot 2+3\cdot\sqrt[3]{5}\cdot 2^2+2^3}=$
$=\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{5}+1\right)^3}-\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{5}+2\right)^3}=\sqrt[3]{5}+1-\left(\sqrt[3]{5}+2\right)=-1$

7. Gyöktelenítse a törtek nevezőjét!

a) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ b) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ c) $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+\sqrt{3}}$

d) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$ e) $\frac{3}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4}}$ f) $\frac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

Megoldás:

a) $\frac{5}{\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{7}$

b) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

c) $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+\sqrt{3}}=\frac{(2\sqrt{6}-\sqrt{3})(2\sqrt{6}-\sqrt{3})}{(2\sqrt{6}+\sqrt{3})(2\sqrt{6}-\sqrt{3})}=\frac{(2\sqrt{6})^2-4\sqrt{6}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{(2\sqrt{6})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{27-12\sqrt{2}}{21}=\frac{9-4\sqrt{2}}{7}$

d) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}=\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}}=\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{2\sqrt[3]{2}}{2}=\sqrt[3]{2}$

e) $\frac{3}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4}}=\frac{3\cdot\left(\left(\sqrt[3]{7}\right)^2+\sqrt[3]{7\cdot 4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2\right)}{\left(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4}\right)\left(\left(\sqrt[3]{7}\right)^2+\sqrt[3]{7\cdot 4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2\right)}=\frac{3\cdot\left(\left(\sqrt[3]{7}\right)^2+\sqrt[3]{7\cdot 4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2\right)}{7-4}=\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16}$

f) $\frac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}=\frac{(x+y)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-\sqrt[3]{xy}+\left(\sqrt[3]{y}\right)^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-\sqrt[3]{xy}+\left(\sqrt[3]{y}\right)^2\right)}=\frac{(x+y)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-\sqrt[3]{xy}+\left(\sqrt[3]{y}\right)^2\right)}{x+y}=\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-\sqrt[3]{xy}+\left(\sqrt[3]{y}\right)^2$

8. Számolja ki a kifejezés pontos értékét!

$$\left(\left(128^{\frac{3}{7}}\cdot 27^{\frac{1}{3}}\cdot 48^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(ctg\frac{2\pi}{3}\right)^{-1}\right)^2+2\sqrt{6}$$

Megoldás:

$\left(\left(128^{\frac{3}{7}}\cdot 27^{\frac{1}{3}}\cdot 48^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(ctg\frac{2\pi}{3}\right)^{-1}\right)^2+2\sqrt{6}=\left(\left(\left(\sqrt[7]{128}\right)^3\cdot\sqrt[3]{27}\cdot\frac{1}{48}\right)^{-\frac{1}{2}}+tg\frac{2\pi}{3}\right)^2+2\sqrt{6}=$

$=\left(\left(\frac{2^3\cdot 3}{48}\right)^{-\frac{1}{2}}-\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{6}=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}-\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{6}=\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{6}=$

$=2-2\sqrt{6}+3++2\sqrt{6}=5$

9. Írja fel a gyökös kifejezéseket törtkitevő használatával!

a) $\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}$ b) $\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^5}$ c) $\dfrac{a\cdot\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^5}}$

Megoldás:

a) $\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}=\left(2\cdot2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{2}{3}}$

b) $\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^5}=x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{5}{4}}=x^{\frac{2}{3}+\frac{5}{4}}=x^{\frac{23}{12}}$

c) $\dfrac{a\cdot\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^5}}=\dfrac{a\cdot\left(a\cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{5}{3}}}=\dfrac{a\cdot\left(a^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{5}{3}}}=\dfrac{a\cdot a^{\frac{5}{12}}}{a^{\frac{5}{3}}}=a^{\frac{17}{12}-\frac{5}{3}}=a^{-\frac{3}{12}}=a^{-\frac{1}{4}}$

10. Bizonyítsa be, hogy ha $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, akkor

$$\sqrt[3]{a^2x}+\sqrt[3]{b^2y}+\sqrt[3]{c^2z}=\sqrt[3]{(a+b+c)^2(x+y+z)}!$$

Megoldás:

Jelöljük a közös arányokat k-val:

$k=\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}\quad\Rightarrow\quad x=k\cdot a;\ \ y=k\cdot b;\ \ z=k\cdot c.$

A bizonyítandó állítás bal oldala:

$\sqrt[3]{a^2x}+\sqrt[3]{b^2y}+\sqrt[3]{c^2z}=\sqrt[3]{a^2\cdot k\cdot a}+\sqrt[3]{b^2\cdot k\cdot b}+\sqrt[3]{c^2\cdot k\cdot c}=(a+b+c)\cdot\sqrt[3]{k};$

jobb oldala:

$\sqrt[3]{(a+b+c)^2(x+y+z)}=\sqrt[3]{(a+b+c)^2(k\cdot a+k\cdot b+k\cdot c)}=\sqrt[3]{(a+b+c)^3k}=$
$=(a+b+c)\cdot\sqrt[3]{k}.$

Tehát az állítás valóban igaz.