Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. TÉTEL (30 pont)

5p **1.** Számítsd ki az $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladvány első három tagjának összegét, ha $a_1 = 6$ és $a_2 = 12$.

5p **2.** Határozd meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 4$ függvényhez rendelt parabola csúcsának koordinátáit!

5p **3.** Oldd meg a valós számok halmazán a $(3^x - 1)(3^x - 3) = 0$ egyenletet!

5p **4.** Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy a kétjegyű természetes számok halmazából véletlenszerűen kiválasztva egy számot, az tartalmazza az 1-es számjegyet!

5p **5.** Adott az ABC egyenlő oldalú háromszög, amelyben $AB = 2$. Számítsd ki az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ vektor hosszát!

5p **6.** Számítsd ki az ABC egyenlőszárú háromszög területét, ha $A = \frac{\pi}{2}$ és $AC = 4$.

II. TÉTEL (30 pont)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & 2 \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol a egy valós szám.

5p **a)** Igazold, hogy $\det(A(0)) = 8$.

5p **b)** Határozd meg az a valós értékeit, amelyekre $\det(A(a)) = 0$.

5p **c)** Ha $A(1)\cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ határozd meg az $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mátrixot!

2. Legyenek x_1, x_2 és x_3 az $f = X^3 - 2X^2 + 3X + m$ polinom gyökei, ahol m egy valós szám.

5p **a)** Számítsd ki az $f(1)$ értékét!

5p **b)** Igazold, hogy $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2$.

5p **c)** Határozd meg az m valós értékét ha $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 8$.

III. TÉTEL (30 pont)

1. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Határozd meg a függvény grafikusképe aszimptótájának egyenletét a $+\infty$-ben!

5p **c)** Igazold, hogy $f(x) \leq \frac{1}{e}$ bármely $x\in(0,+\infty)$ esetén!

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{11}{6}$.

5p **b)** Minden n nemnulla természetes szám esetén adott az $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}dx$ szám. Igazold, hogy $I_{n+1} \leq I_n$ bármely n nemnulla természetes szám esetén!

5p **c)** Határozd meg az a pozitív valós számot, ha $\int_0^a \frac{2x+1}{f(x)}dx = \ln 3$.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_3 = 18$	**2p**
	$a_1 + a_2 + a_3 = 36$	**3p**
2.	$x_V = -1$	**2p**
	$y_V = 3$	**3p**
3.	$3^x = 1$ sau $3^x = 3$	**2p**
	$x = 0$ sau $x = 1$	**3p**
4.	Sunt 18 numere de două cifre care conţin cifra 1, deci sunt 18 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$	**2p**
5.	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$	**2p**
	ΔABC echilateral $\Rightarrow AC = 2$	**3p**
6.	ΔABC dreptunghic isoscel $\Rightarrow AB = 4$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 8 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 8$	**3p**
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & 2 \\ a & a & 2 \end{vmatrix} = (a-2)^2(a+2)$	**3p**
	$(a-2)^2(a+2) = 0 \Leftrightarrow a = -2$ sau $a = 2$	**2p**
c)	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + 2z = 5 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$	**2p**
	$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + m =$	**2p**
	$= m + 2$	**3p**
b)	$x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3$	**2p**
	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 2^2 - 2 \cdot 3 = -2$	**3p**

c)	$\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)-2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+3\left(x_1+x_2+x_3\right)+3m=0$	**2p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-3m-10\Rightarrow m=-6$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2},\ x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuaţie $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f'(e)=0$, $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,e)$ și $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(e,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\le f(e)\Rightarrow f(x)\le\dfrac{1}{e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2+x+1\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\right\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{11}{6}$	**2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{x^2+x+1}dx$ pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și $x\in[0,1]$ avem $x^n\ge0,\ x-1\le0$ și $x^2+x+1>0\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$	**3p**
c)	$\displaystyle\int_0^a\frac{2x+1}{f(x)}dx=\int_0^a\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\left.\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right)\right\vert_0^a=\ln\left(a^2+a+1\right)$	**3p**
	$\ln\left(a^2+a+1\right)=\ln3\Leftrightarrow a^2+a+1=3$ care are soluția pozitivă $a=1$	**2p**