

Examenul de bacalaureat național 2014

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. TÉTEL

(30 punct)

- 5p 1. Határozd meg a $z = 1 + 2i + 3i^2$ komplex szám valós részét!
- 5p 2. Határozd meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3x - 5$ függvények grafikus képei metszéspontjának koordinátáit!
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $3^{x^2-x} = 3^{2x}$ egyenletet!
- 5p 4. Határozd meg a 0, 1, 2 és 3 számjegyekkel alkotható kétjegyű páros természetes számok számát!
- 5p 5. Az xOy Descartes-féle koordináta rendszerben adottak az $\overline{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ és $\overline{AC} = (m+1)\vec{i} + 4\vec{j}$ vektorok, ahol m valós szám. Határozd meg azt az m valós számot, amelyre $\overline{AC} = 2\overline{AB}$.
- 5p 6. Adott az ABC háromszög, amelyben $AB = AC = 3$ és $BC = 3\sqrt{2}$. Számítsd ki $\cos C$ értékét!

II. TÉTEL

(30 punct)

1. Adott az $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 2x^2 - 2x & 4x & 1 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.

- 5p a) Igazold, hogy $\det(A(0)) = 1$.
- 5p b) Igazold, hogy $A(x+y) = A(x) \cdot A(y)$ bármely x és y valós szám esetén!
- 5p c) Határozd meg azokat az x valós számokat, amelyekre $A(x^2 + 2) = A(x) \cdot A(x) \cdot A(x)$.
2. Adott az $f = X^3 - 3X^2 + aX - 2$ polinom, ahol a valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $f(2) = 2(a-3)$.
- 5p b) Határozd meg azt az a valós számot, amelyre f osztható $X^2 - X + 1$ -gyel!
- 5p c) $a = 3$ esetén oldd meg a valós számok halmazán az $f(2^x) = 0$ egyenletet!

III. TÉTEL

(30 punct)

1. Adott az $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{xe^x}{x+2}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{(x^2 + 2x + 2)e^x}{(x+2)^2}$, $x \in (-2, +\infty)$.

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képének $x_0 = 0$ abszcisszájú pontjában a grafikus képhez húzott érintő egyenletét!

5p c) Igazold, hogy az $f(x) = 1$ egyenletnek van legalább egy gyöke az $(1, 2)$ intervallumban!

2. Minden zérótól különböző n természetes szám esetén adott az $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$ szám.

5p a) Igazold, hogy $I_1 = 1 - \ln 2$.

5p b) Igazold, hogy $I_{n+1} \leq I_n$ bármely zérótól különböző n természetes szám esetén!

5p c) Igazold, hogy $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Examenul de bacalaureat național 2014

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Barem de evaluare și de notare

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z = -2 + 2i$ Partea reală a numărului z este egală cu -2	2p 3p
2.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x - 1 = 3x - 5$ $x = 2$ și $y = 1$	3p 2p
3.	$x^2 - x = 2x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$ $x_1 = 0$ și $x_2 = 3$	3p 2p
4.	Cifra unităților poate fi 0 sau 2 Cifra zecilor poate fi aleasă în câte 3 moduri, deci se pot forma $3 \cdot 2 = 6$ numere	2p 3p
5.	$(m+1)\vec{i} + 4\vec{j} = 2(3\vec{i} + 2\vec{j})$ $m = 5$	2p 3p
6.	$\triangle ABC$ este dreptunghic isoscel $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	2p 3p
b)	$A(x+y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 \\ 2(x+y)^2 - 2(x+y) & 4(x+y) & 1 \end{pmatrix}$ $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 \\ 2x^2 + 4xy + 2y^2 - 2x - 2y & 4x + 4y & 1 \end{pmatrix} = A(x+y)$ pentru orice numere reale x și y	2p 3p
c)	$A(x) \cdot A(x) \cdot A(x) = A(3x)$ $x^2 + 2 = 3x \Rightarrow x_1 = 1$ și $x_2 = 2$	2p 3p
2.a)	$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + a \cdot 2 - 2 =$ $= 2a - 6 = 2(a - 3)$	2p 3p
b)	$f = (X - 2)(X^2 - X + 1) + (a - 3)X$ $a = 3$	3p 2p

c)	$f = (X - 2)(X^2 - X + 1)$	2p
	$(2^x - 2)(2^{2x} - 2^x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(xe^x)' \cdot (x+2) - xe^x \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} =$	2p
	$= \frac{(e^x + xe^x) \cdot (x+2) - xe^x}{(x+2)^2} = \frac{(x^2 + 2x + 2)e^x}{(x+2)^2}, x \in (-2, +\infty)$	3p
b)	$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$	2p
	$f(0) = 0, f'(0) = \frac{1}{2},$ deci ecuația tangentei este $y = \frac{1}{2}x$	3p
c)	Funcția $g : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) - 1$ este continuă pe $[1, 2]$	2p
	$g(1) \cdot g(2) = \frac{e-3}{3} \cdot \frac{e^2-2}{2} < 0,$ deci există $c \in (1, 2)$ astfel încât $g(c) = 0,$ adică $f(c) = 1$	3p
2.a)	$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx =$	2p
	$= x \Big _0^1 - \ln(1+x) \Big _0^1 = 1 - \ln 2$	3p
b)	$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n \left(\frac{x}{1+x^{n+1}} - \frac{1}{1+x^n} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} dx$	2p
	Pentru orice $x \in [0, 1]$ avem $x-1 \leq 0, x^n \geq 0, 1+x^n > 0$ și $1+x^{n+1} > 0,$ deci $I_{n+1} - I_n \leq 0$	3p
c)	Pentru orice $x \in [0, 1]$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$	2p
	$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx \leq \int_0^1 x^n dx \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1},$ deci $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$	3p