Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. TÉTEL (30 pont)

5p	**1.** Igazold, hogy $3(2+4i)+2(1-6i)=8$.
5p	**2.** Igazold, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+1$ függvény által meghatározott parabola érinti az Ox tengelyt!
5p	**3.** Oldd meg a valós számok halmazán az $5^{x^2+4}=5^{4x}$ egyenletet!
5p	**4.** Határozd meg az 1, 3, 5 és 7 számjegyekkel alkotható, különböző számjegyekből álló kétjegyű természetes számok számát!
5p	**5.** Az xOy Descartes-féle koordináta rendszerben adottak az $A(-2,2)$, $B(-4,-2)$ és $C(4,2)$ pontok. Határozd meg az A ponton átmenő és a BC egyenesre merőleges d egyenes egyenletét!
5p	**6.** Igazold, hogy $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=0$.

II. TÉTEL (30 pont)

	1. Adott az $A(n)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 2^n-1 & 1\end{pmatrix}$ mátrix, ahol n természetes szám.
5p	**a)** Igazold, hogy $\det(A(0))=1$.
5p	**b)** Határozd meg azt az n természetes számot, amelyre $A(n)\cdot A(1)=A(3)$.
5p	**c)** Határozd meg azokat a p és q természetes számokat, amelyekre $A(p)\cdot A(q)=A(pq)$.
	2. Adott az $f=X^3+X^2-3X+2$ polinom.
5p	**a)** Számítsd ki $f(0)$ értékét!
5p	**b)** Határozd meg az f polinomnak X^2-4-gyel való osztási hányadosát és maradékát!
5p	**c)** Igazold, hogy $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=20$, ahol x_1, x_2 és x_3 az f polinom gyökei!

III. TÉTEL (30 pont)

	1. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+e^x$ függvény.
5p	**a)** Számítsd ki $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$ értékét!
5p	**b)** Határozd meg az f függvény grafikus képe $-\infty$-hez tartó ágának ferde aszimptotájának egyenletét!
5p	**c)** Igazold, hogy $f(x)\geq 4x+1$ bármely x valós szám esetén!
	2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+x+1}$ függvény.
5p	**a)** Igazold, hogy $\int_0^1 (x^2+x+1)f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.
5p	**b)** Igazold, hogy $\int_0^1 (f(x)-x+1)\,dx=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
5p	**c)** Igazold, hogy $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int_0^t f(x)\,dx\right)=\frac{1}{4}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$6+12i+2-12i=$ $=6+2=8$	**3p** **2p**
2.	$\Delta=4-4=$ $=0$, deci parabola asociată funcției f este tangentă la axa Ox	**3p** **2p**
3.	$x^2+4=4x \Leftrightarrow x^2-4x+4=0$ $x=2$	**3p** **2p**
4.	Cifra unităților se poate alege în 4 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în 3 moduri, deci se pot forma $4\cdot 3=12$ numere	**3p** **2p**
5.	Panta dreptei BC este $m_{BC}=\frac{1}{2} \Rightarrow m_d=-2$ $d: y=-2x-2$	**2p** **3p**
6.	$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=0$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$ $=1+0+0-0-0-0=1$	**2p** **3p**
b)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$, $A(n)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^{n+1}&0\\0&2^{n+1}-1&1\end{pmatrix}$ $A(3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^3&0\\0&2^3-1&1\end{pmatrix}$ și $A(n)\cdot A(1)=A(3)\Rightarrow n=2$	**3p** **2p**
c)	$A(p)\cdot A(q)=A(p+q)$ pentru orice numere naturale p și q $A(p+q)=A(pq)\Rightarrow p+q=pq\Rightarrow (p-1)(q-1)=1\Rightarrow p=q=0$ sau $p=q=2$	**2p** **3p**
2.a)	$f(0)=0^3+0^2-3\cdot 0+2=$ $=2$	**3p** **2p**
b)	Câtul este $X+1$ Restul este $X+6$	**3p** **2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=-1$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-3$	**2p**
	$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=2(x_1+x_2+x_3)^2-6(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=20$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(3x)'+\left(e^x\right)'=$	**2p**
	$=3+e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+e^x}{x}=3$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-3x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, deci dreapta de ecuație $y=3x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$g'(0)=0$, $g'(x)<0$ pentru orice $x\in(-\infty,0)$ și $g'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-4x-1=e^x-x-1$	**3p**
	$g(x)\geq g(0)\Rightarrow g(x)\geq 0\Rightarrow f(x)\geq 4x+1$ pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(x^2+x+1\right)f(x)dx=\int_0^1 x^3\,dx=$	**2p**
	$=\left.\frac{x^4}{4}\right\|_0^1=\frac{1}{4}$	**3p**
b)	$\int_0^1\left(f(x)-x+1\right)dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+x+1}dx=\int_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\left.\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$	**2p**
c)	$\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int_0^t f(x)dx\right)=\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t)}{4t^3}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{t\to0}\frac{t^3}{4t^3\left(t^2+t+1\right)}=\frac{1}{4}$	**2p**