Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADAT (30 pont)

5p **1.** Határozd meg a $z=3+2(1-i)$ komplex szám valós részét!

5p **2.** Igazold, hogy $x_1+x_2+2x_1x_2=23$, ha tudjuk, hogy x_1 és x_2 az $x^2-3x+10=0$ egyenlet megoldásai!

5p **3.** Oldd meg a valós számok halmazán a $\sqrt{x^2+x+1}=1$ egyenletet!

5p **4.** Hány háromjegyű, különböző számjegyeket tartalmazó páratlan természetes szám képezhető az $\{1,\ 2,\ 3\}$ halmaz elemeiből?

5p **5.** Határozd meg az a valós szám értékét, amelyre az $y=(a-1)x+1$ és $y=2x-3$ egyenletű egyenesek párhuzamosak!

5p **6.** Határozd meg az ABC háromszög köré írt kör sugarát, ha $AB=3$, $AC=4$ és $BC=5$.

II. FELADAT (30 pont)

1. Adott az $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.

5p **a)** Számítsd ki $\det(A(2))$ értékét!

5p **b)** Határozd meg az x valós szám értékét, amelyre $A(x)\cdot A(-x)=I_2$, ahol $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Igazold, hogy $\det\left(A(1)+A(2)+\dots+A(n)\right)=\dfrac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$, bármely n zérótól különböző természetes szám esetén!

2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x*y=4(x+y-3)-xy$ asszociatív algebrai műveletet.

5p **a)** Számítsd ki $2*4$ értékét!

5p **b)** Igazold, hogy $x*y=4-(x-4)(y-4)$, bármely x és y valós számok esetén!

5p **c)** Oldd meg a valós számok halmazán az $x*x*x=x$ egyenletet!

III. FELADAT (30 pont)

1. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x-x+1$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\lim\limits_{x\to e} f(x)=1$.

5p **b)** Igazold, hogy $f'(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Igazold, hogy $f(x)\geq 0$, bármely $x\in(0,+\infty)$ esetén!

2. Adott az $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+8x+15}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\int\limits_0^{2014}(x+3)(x+5)f(x)\,dx=2014$.

5p **b)** Igazold, hogy $\int\limits_{-1}^{1}f(x)\cdot f'(x)\,dx=-\dfrac{1}{144}$.

5p **c)** Határozd meg az a, $a>0$ valós számot, ha tudjuk, hogy az f függvény grafikus képe, az Ox tengely, valamint az $x=0$ és $x=a$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területe $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{10}{9}$.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=3+2-2i=$	**3p**
	$=5-2i$, deci partea reală a numărului z este egală cu 5	**2p**
2.	$x_1+x_2=3$, $x_1x_2=10$	**3p**
	$x_1+x_2+2x_1x_2=3+2\cdot 10=23$	**2p**
3.	$x^2+x+1=1\Rightarrow x^2+x=0$	**3p**
	$x_1=-1$ și $x_2=0$ care verifică ecuația	**2p**
4.	Cifra unităților poate fi aleasă în 2 moduri	**2p**
	Cum cifrele sunt distincte, cifra zecilor poate fi aleasă în 2 moduri, iar cifra sutelor poate fi aleasă într-un singur mod	**2p**
	Se pot forma $2\cdot 2\cdot 1=4$ numere	**1p**
5.	$a-1=2$	**3p**
	$a=3$	**2p**
6.	$A=\frac{\pi}{2}$	**2p**
	$R=\frac{5}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(2)\right)=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-1\cdot 1=$	**3p**
	$=3$	**2p**
b)	$A(x)\cdot A(-x)=\begin{pmatrix}x & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x & 1\\ 1 & -x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x^2+1 & 0\\ 0 & -x^2+1\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}-x^2+1 & 0\\ 0 & -x^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=0$	**2p**
c)	$A(1)+A(2)+\dots+A(n)=\begin{pmatrix}1+2+...+n & n\\ n & 1+2+...+n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{n(n+1)}{2} & n\\ n & \frac{n(n+1)}{2}\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{vmatrix}\frac{n(n+1)}{2} & n\\ n & \frac{n(n+1)}{2}\end{vmatrix}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n\cdot n=\frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$ pentru orice număr natural nenul n	**3p**
2.a)	$2*4=4(2+4-3)-2\cdot 4=$	**3p**
	$=12-8=4$	**2p**

b)	$x * y = 4x + 4y - 12 - xy = 4 - xy + 4x + 4y - 16 =$	**2p**
	$= 4 - x(y-4) + 4(y-4) = 4 - (x-4)(y-4)$ pentru orice numere reale x şi y	**3p**
c)	$x * x = 4 - (x-4)^2 \Rightarrow x * x * x = 4 + (x-4)^3$	**2p**
	$(x-4)^3 = x - 4 \Rightarrow x = 3$ sau $x = 4$ sau $x = 5$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to e} f(x) = \lim\limits_{x\to e}(x\ln x - x + 1) =$	**2p**
	$= e\ln e - e + 1 = 1$	**3p**
b)	$f'(x) = (x\ln x - x + 1)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 =$	**3p**
	$= \ln x + 1 - 1 = \ln x,\ x \in (0,+\infty)$	**2p**
c)	$f'(1) = 0$, $f'(x) < 0$ pentru $x \in (0,1)$ şi $f'(x) > 0$ pentru $x \in (1,+\infty)$	**3p**
	$f(x) \ge f(1) \Rightarrow f(x) \ge 0$ pentru orice $x \in (0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^{2014} (x+3)(x+5) f(x)\,dx = \int\limits_0^{2014} 1\,dx =$	**2p**
	$= x\Big\vert_0^{2014} = 2014$	**3p**
b)	$\int\limits_{-1}^{1} f(x) \cdot f'(x)dx = \frac{1}{2} f^2(x)\Big\vert_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(f^2(1) - f^2(-1)\right) =$	**3p**
	$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{576} - \frac{1}{64}\right) = -\frac{1}{144}$	**2p**
c)	$\mathcal{A} = \int\limits_0^a \lvert f(x)\rvert dx = \int\limits_0^a \frac{1}{(x+4)^2 - 1}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{x+3}{x+5}\Big\vert_0^a = \frac{1}{2}\ln\frac{5(a+3)}{3(a+5)}$	**3p**
	$\frac{5(a+3)}{3(a+5)} = \frac{10}{9} \Rightarrow a = 1$	**2p**