Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADAT (30 pont)

5p **1.** Adott a $z=2+3i$ komplex szám. Számítsd ki z^2 -et!

5p **2.** Határozd meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+9$ függvény Ox tengellyel való metszéspontjainak koordinátáit!

5p **3.** Oldd meg a valós számok halmazán a $\log_9\left(x^2+5\right)=1$ egyenletet!

5p **4.** Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy kétjegyű természetes szám osztható legyen 13 –mal?

5p **5.** Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(-2,0)$, $B(2,0)$ és $C(0,3)$ pontok. Számítsd ki az ABC háromszög területét!

5p **6.** Adott $E(x)=\cos x+\sin\frac{x}{2}$ kifejezés, ahol x valós szám. Számítsd ki $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$ értékét!

II. FELADAT (30 pont)

1. Adott az $A(a)=\begin{pmatrix}2a+1 & 1\\ 1-a & 2\end{pmatrix}$ mátrix, ahol a valós szám.

5p **a)** Számítsd ki $\det\left(A(1)\right)$ értékét!

5p **b)** Határozd meg az a valós számot, ha tudjuk, hogy $\det\left(A(a)\right)=1$.

5p **c)** Határozd meg az $A(0)$ mátrix inverzét!

2. A valós számok halmazán értelmezzük a következő algebrai műveletet $x\circ y=2xy-3x-3y+6$

5p **a)** Számítsd ki $1\circ 2$ értékét!

5p **b)** Igazold, hogy $x\circ y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$, bármely x és y valós számok esetén!

5p **c)** Oldd meg a valós számok halmazán az $x\circ x=2$ egyenletet!

III. FELADAT (30 pont)

1. Adott az $f:(-\infty,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{-x}}{x-2}$ függvény.

5p **a)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ határértéket!

5p **b)** Igazold, hogy $f'(x)=\frac{(1-x)e^{-x}}{(x-2)^2}$, $x\in(-\infty,2)$.

5p **c)** Igazold, hogy $f(x)\le-\frac{1}{e}$, bármely $x\in(-\infty,2)$ esetén!

2. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\int\limits_1^2(x+1)f(x)dx=2\ln 2-1$.

5p **b)** Igazold, hogy $\int\limits_1^e\left(f(x)+(x+1)f'(x)\right)dx=1$.

5p **c)** Számítsd ki a $g:[2,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{\ln x}{f(x)}$ függvény grafikus képének az Ox tengely körüli forgatásából kapott forgástest térfogatát!

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2=2^2+2\cdot 2\cdot 3i+(3i)^2=$ $=-5+12i$	**3p** **2p**
2.	$f(x)=0\Rightarrow (x-3)^2=0$ $x=3$ şi $y=0$	**3p** **2p**
3.	$x^2+5=9\Rightarrow x^2-4=0$ $x_1=-2$ și $x_2=2$, care verifică ecuația	**3p** **2p**
4.	Sunt 7 numere de două cifre divizibile cu 13, deci sunt 7 cazuri favorabile Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{7}{90}$	**2p** **1p** **2p**
5.	$AB=4$, $CO=3$ și CO este înălțime $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{4\cdot 3}{2}=6$	**3p** **2p**
6.	$E\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}+\sin\dfrac{\pi}{4}=$ $=0+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(1))=\begin{vmatrix}3&1\\0&2\end{vmatrix}=3\cdot 2-1\cdot 0=$ $=6$	**3p** **2p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}2a+1&1\\1-a&2\end{vmatrix}=5a+1$ $5a+1=1\Rightarrow a=0$	**3p** **2p**
c)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$; $\det(A(0))=1$ $(A(0))^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$	**2p** **3p**
2.a)	$1\circ 2=2\cdot 1\cdot 2-3\cdot 1-3\cdot 2+6=$ $=1$	**3p** **2p**
b)	$x\circ y=2\left(xy-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2}y+\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}\right)=$ $=2\left(x\left(y-\dfrac{3}{2}\right)-\dfrac{3}{2}\left(y-\dfrac{3}{2}\right)\right)+\dfrac{3}{2}=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\left(y-\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{3}{2}$ pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**

c)	$2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}=2\Rightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$	**3p**
	$x_1=1$ şi $x_2=2$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{-x}}{x-2}=\frac{e^{-1}}{1-2}=$	**3p**
	$=-\frac{1}{e}$	**2p**
b)	$f'(x)=\frac{\left(e^{-x}\right)'\cdot(x-2)-e^{-x}\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{-e^{-x}\cdot(x-2)-e^{-x}}{(x-2)^2}$	**3p**
	$=\frac{-e^{-x}\cdot(x-1)}{(x-2)^2}=\frac{(1-x)e^{-x}}{(x-2)^2}$, $x\in(-\infty,2)$	**2p**
c)	$f'(1)=0$, $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(-\infty,1)$ şi $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(1,2)$	**3p**
	$f(x)\le f(1)\Rightarrow f(x)\le-\frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(-\infty,2)$	**2p**
2.a)	$\int_1^2(x+1)f(x)dx=\int_1^2\ln x\,dx=x\ln x\Big\vert_1^2-\int_1^2 1dx=$	**3p**
	$=2\ln 2-x\Big\vert_1^2=2\ln 2-1$	**2p**
b)	$\int_1^e\left(f(x)+(x+1)\cdot f'(x)\right)dx=\int_1^e\left((x+1)\cdot f(x)\right)'dx=$	**3p**
	$=(x+1)f(x)\Big\vert_1^e=\ln e=1$	**2p**
c)	$V=\pi\cdot\int_2^3 g^2(x)dx=\pi\cdot\int_2^3(x+1)^2dx=$	**2p**
	$=\pi\cdot\frac{(x+1)^3}{3}\Big\vert_2^3=\frac{37\pi}{3}$	**3p**