

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică  $M_{\text{mate-info}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADAT

(30 punct)

- 5p 1. Adott a  $z = 1 + i$  komplex szám. Számítsd ki:  $(z-1)^2$ .
- 5p 2. Igazold, hogy  $3(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = 3$ , ha  $x_1$  és  $x_2$  az  $x^2 - 5x + 3 = 0$  egyenlet gyökei.
- 5p 3. Oldd meg a  $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$  egyenletet a valós számok halmazán!
- 5p 4. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy a kétjegyű természetes számok halmazából véletlenszerűen kiválasztott szám 13-mal osztható legyen!
- 5p 5. Az  $xOy$  koordináta-rendszerben adott az  $y = 3x + 4$  egyenletű  $d$  egyenes és az  $A(1,0)$  pont. Határozd meg az  $A$  ponton átmenő,  $d$ -vel párhuzamos egyenes egyenletét!
- 5p 6. Számítsd ki az  $ABC$  háromszög köré írható kör sugarát, ha  $AB = 12$  és  $C = \frac{\pi}{6}$ .

II. FELADAT

(30 punct)

1. Adott az  $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a+1 \\ 2 & a+2 & a+3 \end{pmatrix}$  mátrix, ahol  $a$  valós szám.
- 5p a) Számítsd ki:  $\det(A(a))$ .
- 5p b) Határozd meg az  $n$  természetes számot, ha teljesül a  $2A(n^2) - A(n) = A(6)$  egyenlőség!
- 5p c) Igazold, hogy végtelen sok  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  mátrix létezik, amelyre teljesül  $A(2015) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
2. Adott az  $f = X^3 + mX - 3$  polinom, ahol  $m$  valós szám.
- 5p a) Ha  $m = 2$  igazold, hogy  $f(1) = 0$ .
- 5p b) Határozd meg az  $m$  valós számot tudva, hogy az  $f$  polinom osztható  $X + 1$ -gyel!
- 5p c) Igazold, hogy bármely  $m$  szigorúan pozitív valós szám esetén az  $f$  polinomnak van két, egyenlő modulusú gyöke!

III. FELADAT

(30 punct)

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{e^x - x}$  függvény.
- 5p a) Számítsd ki:  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Határozd meg az  $f$  függvény grafikus képének  $x_0 = 0$  abszcisszájú pontjában, az  $f$  függvény grafikus képéhez húzott érintő egyenletét!
- 5p c) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$  határértéket!
2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$  függvény.
- 5p a) Számítsd ki:  $\int_0^2 f^2(x) dx$ .
- 5p b) Igazold hogy az  $f$  bármely primitív függvénye növekvő függvény  $\mathbb{R}$ -en!
- 5p c) Bármely nullától különböző  $n$  természetes szám esetén tekintsük az  $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$  számot. Igazold, hogy  $nI_n = \sqrt{5} - 4(n-1)I_{n-2}$  bármely  $n$ ,  $n \geq 3$  természetes szám esetén!