Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADAT (30 pont)

5p **1.** Határozd meg az $(a_n)_{n\ge 1}$ számtani haladvány harmadik tagját, ha tudjuk, hogy $a_1 = 2$ és $a_2 = 5$.

5p **2.** Határozd meg az a valós szám értékét, ha tudjuk, hogy az $A(3,5)$ pont rajta van az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = a - x$ függvény grafikus képén!

5p **3.** Oldd meg a valós számok halmazán a $8^{4-x} = 2^{2x+2}$ egyenletet!

5p **4.** Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy kétjegyű természetes szám számjegyeinek szorzata 0 legyen?

5p **5.** Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adott az $M(1,1)$ pont. Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az M ponton, és iránytényezője 2.

5p **6.** Az ABC háromszögben tudjuk, hogy $AB = 5$, $AC = 12$ és $BC = 13$. Igazold, hogy $\sin C = \frac{5}{13}$.

II. FELADAT (30 pont)

1. Adott az $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1+2x \end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.

5p **a)** Igazold, hogy $\det(A(1)) = 2$.

5p **b)** Igazold, hogy $A(x)A(y) = A(xy + x + y)$, bármely x és y valós számok esetén!

5p **c)** Határozd meg azokat az x valós számokat, amelyekre $A(x)A(x)A(x) = A(7)$.

2. Adott az $f = X^3 + 2X^2 + X + m$ polinom, ahol m valós szám.

5p **a)** Igazold, hogy $f(0) = m$.

5p **b)** $m = 1$ esetén igazold, hogy $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 5x_1x_2x_3$, ahol x_1, x_2 és x_3 az f polinom gyökei!

5p **c)** Határozd meg az m természetes prímszámot, ha tudjuk, hogy az f polinomnak van egy egész gyöke!

III. FELADAT (30 pont)

1. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Határozd meg az f függvény vízszintes aszimptotájának egyenletét a $+\infty$ -ben!

5p **c)** Igazold, hogy az f függvény deriváltja csökkenő az $\mathbb{R}$ halmazon!

2. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\int_1^e \frac{1}{x}dx = 1$.

5p **b)** Számítsd ki az f függvény grafikus képe, az Ox tengely, valamint az $x = 1$ és $x = e$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!

5p **c)** Határozd meg a nullától különböző n természetes számot úgy, hogy $\int_1^e \frac{1}{x}\left(f(x)\right)^n dx = \frac{1}{2015}$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=5-2=3$	**3p**
	$a_3=5+3=8$	**2p**
2.	$f(3)=5 \Leftrightarrow a-3=5$	**3p**
	$a=8$	**2p**
3.	$2^{3(4-x)}=2^{2x+2} \Leftrightarrow 12-3x=2x+2$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 9 numere naturale de două cifre care au produsul cifrelor egal cu 0, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**2p**
5.	$y-y_M=2(x-x_M)$	**2p**
	$y=2x-1$	**3p**
6.	$13^2=5^2+12^2$, deci triunghiul ABC este dreptunghic în A	**2p**
	$\sin C=\frac{AB}{BC}=\frac{5}{13}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}0&0&2\\0&1&0\\-1&0&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-(-2)-0-0=2$	**3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}(1-x)(1-y)-2xy&0&(1-x)2y+2x(1+2y)\\0&1&0\\-x(1-y)-(1+2x)y&0&-2xy+(1+2x)(1+2y)\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1-(xy+x+y)&0&2(xy+x+y)\\0&1&0\\-(xy+x+y)&0&1+2(xy+x+y)\end{pmatrix}=A(xy+x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A(x)A(x)A(x)=A\left((x+1)^3-1\right)$, pentru orice număr real x	**3p**
	$(x+1)^3-1=7 \Leftrightarrow x=1$	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3+2\cdot 0^2+0+m=$	**3p**
	$=0+0+0+m=m$	**2p**

b)	$x_1+x_2+x_3=-2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1$, $x_1x_2x_3=-1$	**3p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-\left(x_1+x_2+x_3\right)-3=-2\left((-2)^2-2\cdot 1\right)-(-2)-3=-5=5x_1x_2x_3$	**2p**
c)	$x_1\in\mathbb{Z}$ și $f\left(x_1\right)=0\Leftrightarrow m=-x_1\left(x_1+1\right)^2$	**2p**
	Deoarece m este prim, obținem $\left(x_1+1\right)^2=1\Leftrightarrow x_1=0$, care nu convine, sau $x_1=-2$, pentru care $m=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)'=$	**3p**
	$=1-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-\left(x^2+1\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f''(x)=-\frac{x'\sqrt{x^2+1}-x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1}=-\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=-\frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$f''(x)<0$, pentru orice număr real x , deci funcția f' este descrescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
2.a)	$\int_1^e\frac{1}{x}dx=\ln x\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\ln e-\ln 1=1$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_1^e\left\vert f(x)\right\vert dx=\int_1^e\ln x\,dx=x\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=$	**3p**
	$=e-x\Big\vert_1^e=e-e+1=1$	**2p**
c)	$\int_1^e\frac{1}{x}\left(f(x)\right)^n dx=\int_1^e\frac{1}{x}\ln^n x\,dx=\frac{1}{n+1}\ln^{n+1}x\Big\vert_1^e=\frac{1}{n+1}$	**3p**
	$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2015}\Leftrightarrow n=2014$	**2p**