Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADAT (30 pont)

5p **1.** Igazold, hogy $\left(\sqrt{5}+1\right)^2+\left(\sqrt{5}-1\right)^2=12$.

5p **2.** Számítsd ki az $f(1)f(2)f(3)f(4)$ szorzatot, ahol $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$.

5p **3.** Oldd meg a valós számok halmazán a $\log_2\left(x^2-4x+4\right)=0$ egyenletet!

5p **4.** Határozd meg, hogy hány különböző számjegyű háromjegyű páratlan természetes számot lehet alkotni a 2, 3 és 4 számjegyekkel!

5p **5.** Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(1,2)$ és $B(2,3)$ pontok. Határozd meg annak a d egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az A ponton és merőleges az AB egyenesre!

5p **6.** Igazold, hogy $\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)=0$, bármely x valós szám esetén!

II. FELADAT (30 pont)

1. Adott a $B(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ 0 & 1 & 0\\ 3x & 0 & 1\end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.

5p **a)** Igazold, hogy $\det\left(B(0)\right)=1$.

5p **b)** Igazold, hogy $B(x)+B(y)=2B\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$, bármely x és y valós szám esetén!

5p **c)** Határozd meg azokat az x valós számokat, amelyekre $B\left(x^2+1\right)B(x)=B\left(x^2+x+1\right)$.

2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x\circ y=\frac{1}{2}(x-3)(y-3)+3$ asszociatív műveletet.

5p **a)** Igazold, hogy $(-3)\circ 3=3$.

5p **b)** Határozd meg azokat az n természetes számokat, amelyekre $n\circ n=11$.

5p **c)** Számítsd ki az $1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 2015$ kifejezés értékét!

III. FELADAT (30 pont)

1. Adott az $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $f'(x)=-\dfrac{3}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Igazold, hogy az f függvény konvex az $(1,+\infty)$ intervallumon.

5p **c)** Határozd meg az f függvény grafikus képéről annak a pontnak a koordinátáit, amelyben az f grafikus képéhez húzott érintő párhuzamos az $y=-3x$ egyenletű egyenessel!

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x}f(x)\,dx=e(e-1)$.

5p **b)** Határozd meg az f függvénynek azt az F primitívjét, melyre $F(1)=0$

5p **c)** Minden n természetes szám esetén tekintsük az $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx$ számot. Igazold, hogy $I_n+(n+1)I_{n-1}=e$, bármely n, $n\geq 2$ természetes számra!

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{5}+1\right)^2=6+2\sqrt{5}$	**2p**
	$\left(\sqrt{5}-1\right)^2=6-2\sqrt{5}\Rightarrow\left(6+2\sqrt{5}\right)+\left(6-2\sqrt{5}\right)=12$	**3p**
2.	$f(3)=0$	**3p**
	$f(1)f(2)f(3)f(4)=0$	**2p**
3.	$x^2-4x+4=1\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$	**2p**
	$x_1=1$ și $x_2=3$, care verifică ecuația dată	**3p**
4.	Cifra unităților este 3	**2p**
	Numerele sunt 243 și 423, deci se pot forma două astfel de numere	**3p**
5.	$m_{AB}=1$ și $m_d\cdot m_{AB}=-1\Rightarrow m_d=-1$	**3p**
	Ecuația dreptei d este $y=-x+3$	**2p**
6.	$\sin(\pi-x)=\sin x$	**2p**
	$\sin(\pi+x)=-\sin x\Rightarrow\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)=\sin x-\sin x=0$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$B(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(B(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$B(x)+B(y)=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\3x&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&y\\0&1&0\\3y&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&x+y\\0&2&0\\3x+3y&0&2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}1&0&\frac{x+y}{2}\\0&1&0\\3\cdot\frac{x+y}{2}&0&1\end{pmatrix}=2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$B\left(x^2+1\right)B(x)=\begin{pmatrix}3x^3+3x+1&0&x^2+x+1\\0&1&0\\3\left(x^2+x+1\right)&0&3x^3+3x+1\end{pmatrix}$, $B\left(x^2+x+1\right)=\begin{pmatrix}1&0&x^2+x+1\\0&1&0\\3\left(x^2+x+1\right)&0&1\end{pmatrix}$	**3p**
	$3x^3+3x+1=1\Leftrightarrow x=0$	**2p**

2.a)	$(-3)\circ 3=\frac{1}{2}(-3-3)(3-3)+3=$	**3p**
	$=0+3=3$	**2p**
b)	$n\circ n=\frac{1}{2}(n-3)^2+3$	**2p**
	$(n-3)^2=16 \Leftrightarrow n_1=-1$, care nu convine, și $n_2=7$, care convine	**3p**
c)	$x\circ 3=3$ și $3\circ y=3$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 2015=(1\circ 2)\circ 3\circ(4\circ 5\circ\ldots\circ 2015)=3\circ(4\circ 5\circ\ldots\circ 2015)=3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1\cdot(x-1)-(x+2)\cdot 1}{(x-1)^2}=$	**3p**
	$=\frac{x-1-x-2}{(x-1)^2}=-\frac{3}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f''(x)=\frac{6}{(x-1)^3}$, $x\in(1,+\infty)$	**3p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci funcția f este convexă pe intervalul $(1,+\infty)$	**2p**
c)	$f'(x)=-3 \Leftrightarrow (x-1)^2=1$	**3p**
	Cum $x\in(1,+\infty)$, coordonatele punctului sunt $x=2$ și $y=4$	**2p**
2.a)	$\int_1^2 \frac{1}{x}f(x)\,dx=\int_1^2 e^x\,dx=e^x\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=e^2-e=e(e-1)$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(x-1)e^x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F(1)=0\Rightarrow c=0$, deci $F(x)=(x-1)e^x$	**2p**
c)	$I_n=\int_0^1 x^{n+1}e^x\,dx=\left(x^{n+1}e^x\right)\Big\vert_0^1-(n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx=$	**3p**
	$=e-(n+1)I_{n-1}$, deci $I_n+(n+1)I_{n-1}=e$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**2p**