

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADAT

(30 punct)

- 5p 1. Adottak a $z_1 = 2 + 3i$ és $z_2 = 1 - 3i$ komplex számok. Igazold, hogy $z_1 + z_2$ valós szám.
- 5p 2. Számítsd ki az $(f \circ g)(1)$ értéket, ahol $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3x$.
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $4^x - 64 = 0$ egyenletet!
- 5p 4. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott kétjegyű természetes szám, osztható legyen 7-tel.
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adott az $y = 4x + 1$ egyenletű d egyenes és az $A(2, 0)$ pont. Határozd meg az A ponton áthaladó d -vel párhuzamos egyenes egyenletét!
- 5p 6. Igazold, hogy $\sin(\pi - x)\sin x - \cos(\pi - x)\cos x = 1$, bármely x valós szám esetén!

II. FELADAT

(30 pont)

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $B(x) = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol x valós szám.

5p a) Igazold, hogy $\det A = 0$

5p b) Igazold, hogy $A \cdot B(x) + B(x) \cdot A = 3B(x)$, bármely x valós számra!

5p c) Határozd meg azokat az x valós számokat, amelyekre $B(x) \cdot B(x) \cdot B(x) = B(x^2 + x - 2)$.

2. Adott az $f = X^3 - 2X^2 + 2X + m$, polinom, ahol m valós szám.

5p a) Igazold, hogy $f(0) = m$.

5p b) Ha $m = -1$, igazold, hogy $(x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = 4$, ahol x_1, x_2 és x_3 az f polinom gyökei!

5p c) Igazold, hogy az f polinom **nem** minden gyöke valós!

III. FELADAT

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2 + x + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képéhez az f függvény grafikonjának az $x = 0$ abszcisszájú pontjában húzott érintőjének egyenletét.

5p c) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^x$ határértéket!

2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 2x$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $\int_0^1 (f(x) + 2x) dx = e - 1$

5p b) Határozd meg az f függvénynek azt az F primitívjét, melyre $F(1) = e - 3$.

5p c) A $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ függvény grafikus képét megforgatjuk az Ox tengely körül. Igazold, hogy a keletkezett forgástest térfogata $\frac{\pi}{6}(3e^2 - 19)$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (1 - 3i) =$ $= 3$, care este număr real	3p 2p
2.	$g(1) = 3$ $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3) = 2$	2p 3p
3.	$4^x = 4^3$ $x = 3$	2p 3p
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile Sunt 13 numere naturale de două cifre care sunt divizibile cu 7, deci sunt 13 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{13}{90}$	1p 2p 2p
5.	Dreapta paralelă cu dreapta d are panta egală cu 4 Ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d este $y = 4x - 8$	2p 3p
6.	$\sin(\pi - x)\sin x - \cos(\pi - x)\cos x = -\cos(\pi - x + x) =$ $= -\cos \pi = 1$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 + 0 + 0 - 1 - 0 - 0 = 0$	2p 3p
b)	$A \cdot B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & 2x & 0 \end{pmatrix}, B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 2x & 0 & 2x \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}$ $A \cdot B(x) + B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3x & 0 \\ 3x & 0 & 3x \\ 0 & 3x & 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix} = 3B(x)$, pentru orice număr real x	2p 3p
c)	$B(x)B(x)B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2x^3 & 0 \\ 2x^3 & 0 & 2x^3 \\ 0 & 2x^3 & 0 \end{pmatrix}$ și $B(x^2 + x - 2) = \begin{pmatrix} 0 & x^2 + x - 2 & 0 \\ x^2 + x - 2 & 0 & x^2 + x - 2 \\ 0 & x^2 + x - 2 & 0 \end{pmatrix}$ $2x^3 = x^2 + x - 2, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = -1$	3p 2p
2.a)	$f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + m =$ $= 0 - 0 + 0 + m = m$	3p 2p

b)	$x_1 + x_2 + x_3 = 2, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2, x_1x_2x_3 = 1$	3p
	$(x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)(x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2)}{x_1x_2x_3} = \frac{2 \cdot 2}{1} = 4$	2p
c)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$	2p
	Dacă polinomul f ar avea toate rădăcinile reale, am obține $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, contradicție cu $x_1 + x_2 + x_3 = 2$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+x+1) - (2x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^2} =$	3p
	$= \frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)^2}, x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$f(0) = 1, f'(0) = -2$	2p
	Ecuția tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y = -2x + 1$	3p
c)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2x}{x^2 + x + 1} \right)^x =$	2p
	$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2 + x + 1}} = e^{-2}$	3p
2.a)	$\int_0^1 (f(x) + 2x) dx = \int_0^1 e^x dx =$	2p
	$= e^x \Big _0^1 = e - 1$	3p
b)	$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = e^x - x^2 + c, \text{ unde } c \in \mathbb{R}$	2p
	$F(1) = e - 3 \Rightarrow c = -2, \text{ deci } F(x) = e^x - x^2 - 2$	3p
c)	$V = \pi \int_0^1 g^2(x) dx = \pi \int_0^1 (e^x - 2x)^2 dx = \pi \int_0^1 (e^{2x} - 4xe^x + 4x^2) dx =$	2p
	$= \pi \left(\frac{1}{2} e^{2x} - 4(x-1)e^x + 4 \frac{x^3}{3} \right) \Big _0^1 = \frac{\pi(3e^2 - 19)}{6}$	3p