Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADAT (30 pont)

5p	**1.** Számítsd ki az $a=2\left(5-\sqrt{5}\right)$ és $b=2\sqrt{5}$ számok számtani közepét!
5p	**2.** Határozd meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$ függvény grafikus képének az Ox tengellyel való metszéspontjainak abszcisszáit!
5p	**3.** Oldd meg a $\log_5(2x-1)-\log_5 3=0$ egyenletet a valós számok halmazán!
5p	**4.** Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy az egyjegyű természetes számok halmazából véletlenszerűen kiválasztott szám 3–nak többszöröse legyen!
5p	**5.** Az xOy koordináta–rendszerben adottak az $A(2,4)$ és $B(6,4)$ pontok. Határozd meg az AB szakasz felezőpontjának koordinátáit!
5p	**6.** Ha $a,b\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin a=\frac{3}{5}$ és $\sin b=\frac{12}{13}$ igazold, hogy $\sin(a+b)=\frac{63}{65}$.

II. FELADAT (30 pont)

	1. Adott az $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ mátrix.
5p	**a)** Számítsd ki $\det A$.
5p	**b)** Határozd meg azokat a p valós számokat, amelyekre teljesül az $A\cdot A=pA$ egyenlőség!
5p	**c)** Határozd meg a $B=\begin{pmatrix}0 & b\\ b & 0\end{pmatrix}$ mátrixokat, ha $\det(A+B)=0$, ahol b valós szám.
	2. A valós számok halmazán értelmezzük a következő műveletet $x\circ y=-xy+x+y$.
5p	**a)** Számítsd ki $1\circ 2015$.
5p	**b)** Igazold, hogy $x\circ y=-(x-1)(y-1)+1$, bármely x és y valós szám esetén!
5p	**c)** Oldd meg a $3^x\circ 5^x=1$ egyenletet a valós számok halmazán!

III. FELADAT (30 pont)

	1. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$ függvény.
5p	**a)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ határértéket!
5p	**b)** Igazold, hogy $f'(x)=-\frac{3(x-1)(x+1)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**c)** Határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait!
	2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5+x$ függvény.
5p	**a)** Számítsd ki $\int\limits_{-1}^{1} x^5 dx$.
5p	**b)** Igazold, hogy $\int\limits_{0}^{1}\left(f(x)-x^5\right)e^x dx=1$.
5p	**c)** Határozd meg a $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)-x}{x^3}$ függvény grafikus képének az Ox tengely körüli forgatásából származó test térfogatát!

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$m_a = \frac{10-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}}{2} =$	**3p**
	$= \frac{10}{2} = 5$	**2p**
2.	$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$	**3p**
	$x_1=1$ şi $x_2=3$	**2p**
3.	$\log_5 \frac{2x-1}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{3} = 1$	**3p**
	$x=2$ care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 4 numere de o cifră multipli ai lui 3, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 10 numere de o cifră, deci sunt 10 cazuri posibile	**1p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$	**2p**
5.	M mijlocul segmentului $AB \Rightarrow x_M = \frac{2+6}{2} = 4$	**3p**
	$y_M = 4$	**2p**
6.	$\cos a = \frac{4}{5}$, $\cos b = \frac{5}{13}$	**2p**
	$\sin(a+b) = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} + \frac{12}{13}\cdot\frac{4}{5} = \frac{63}{65}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2+2 =$	**3p**
	$=0$	**2p**
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	**3p**
	$p=1$	**2p**
c)	$A+B = \begin{pmatrix} 2 & b-2 \\ b+1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A+B) = -b^2+b$	**2p**
	$\det(A+B)=0 \Leftrightarrow b=0$ sau $b=1 \Leftrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sau $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$1 \circ 2015 = -1\cdot 2015 + 1 + 2015 =$	**3p**
	$=1$	**2p**

b)	$x \circ y = -x(y-1) + (y-1) + 1 =$	**3p**
	$= -(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x şi y	**2p**
c)	$(3^x - 1)(5^x - 1) = 0$	**2p**
	$x = 0$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{3x}{x^2 + 1} =$	**2p**
	$= \frac{3 \cdot 1}{1^2 + 1} = \frac{3}{2}$	**3p**
b)	$f'(x) = \frac{3(x^2 + 1) - 3x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} =$	**2p**
	$= \frac{3 - 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{3(x-1)(x+1)}{(x^2 + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$	**3p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$ şi $x_2 = 1$	**2p**
	$f'(x) \le 0$ pentru orice $x \in (-\infty, -1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, -1]$	**1p**
	$f'(x) \ge 0$ pentru orice $x \in [-1, 1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1, 1]$	**1p**
	$f'(x) \le 0$ pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, +\infty)$	**1p**
2.a)	$\int\limits_{-1}^{1} x^5 dx = \left. \frac{x^6}{6} \right\|_{-1}^{1} =$	**3p**
	$= \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$	**2p**
b)	$\int\limits_{0}^{1} x e^x dx = \left. x e^x \right\|_{0}^{1} - \int\limits_{0}^{1} e^x dx =$	**3p**
	$= e - 0 - e + 1 = 1$	**2p**
c)	$g(x) = \frac{(x^5 + x) - x}{x^3} = x^2 \Rightarrow V = \pi \int\limits_{1}^{2} x^4 dx = \pi \left. \frac{x^5}{5} \right\|_{1}^{2} =$	**3p**
	$= \frac{31}{5} \pi$	**2p**