Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADAT (30 pont)

5p **1.** Igazold, hogy $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{20}{7}=2$.

5p **2.** Határozd meg az a valós számot tudva, hogy az $A(a,0)$ pont rajta van az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$ függvény grafikus képén!

5p **3.** Oldd meg a valós számok halmazán a $\sqrt{x+3}=4$ egyenletet!

5p **4.** Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy az $M=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$ halmaz egy véletlenszerűen kiválasztott eleme a 15-nek többszöröse legyen!

5p **5.** Az xOy koordináta-rendszerben adottak az $A(4,2)$ és $B(4,6)$ pontok. Határozd meg az AB szakasz felezőpontjának koordinátáit!

5p **6**. Igazold, hogy $\sin x=\frac{12}{13}$, ha $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ és $\cos x=\frac{5}{13}$.

II. FELADAT (30 pont)

1. Adottak az $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ és $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ mátrixok.

5p **a)** Igazold, hogy $\det A=-2$.

5p **b)** Igazold, hogy $A+B=5C$.

5p **c)** Bizonyítsd be, hogy $AB+BA+4I_2=25C$, ahol $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x\circ y=xy+4x+4y+12$ műveletet.

5p **a)** Igazold, hogy $5\circ(-4)=-4$.

5p **b)** Igazold, hogy $x\circ y=(x+4)(y+4)-4$, bármely x és y valós szám esetén!

5p **c)** Oldd meg a valós számok halmazán az $x\circ x=x$ egyenletet!

III. FELADAT (30 pont)

1. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3+3x^2+5$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $f'(x)=6x(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)-2x^3}$ határértéket!

5p **c)** Határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait!

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+3x^2$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\int\limits_1^2\left(f(x)-3x^2\right)dx=15$.

5p **b)** Határozd meg az f függvény azon F primitív függvényét, amelyre $F(1)=2015$.

5p **c)** Határozd meg azt az n, $n>1$ természetes számot, amelyre $\int\limits_1^n\frac{f(x)}{x^2}dx=9$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **<u>Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.</u>**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$	**3p**
	$\frac{7}{10}\cdot\frac{20}{7}=2$	**2p**
2.	$f(a)=0 \Leftrightarrow a-2=0$	**3p**
	$a=2$	**2p**
3.	$x+3=16$	**3p**
	$x=13$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea M sunt 3 multipli de 15, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	**2p**
5.	$x_M=4$	**2p**
	$y_M=4$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	**3p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{12}{13}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 3=$	**3p**
	$=4-6=-2$	**2p**
b)	$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=5\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=5C$	**2p**
c)	$AB=\begin{pmatrix}8 & 5\\ 20 & 13\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}13 & 20\\ 5 & 8\end{pmatrix}$, $4I_2=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$	**3p**
	$AB+BA+4I_2=\begin{pmatrix}25 & 25\\ 25 & 25\end{pmatrix}=25\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=25C$	**2p**
2.a)	$5\circ(-4)=5\cdot(-4)+4\cdot 5+4\cdot(-4)+12=$	**3p**
	$=-20+20-16+12=-4$	**2p**

b)	$x \circ y = xy + 4x + 4y + 16 - 4 =$	**2p**
	$= x(y+4) + 4(y+4) - 4 = (x+4)(y+4) - 4$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$x \circ x = (x+4)^2 - 4$	**2p**
	$(x+4)^2 - 4 = x \Leftrightarrow (x+4)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -4$ și $x_2 = -3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = (2x^3)' + (3x^2)' + 5' =$	**2p**
	$= 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x) - 2x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x(x+1)}{3x^2 + 5} =$	**2p**
	$= 2$	**3p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$ și $x_2 = 0$	**2p**
	$f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -1]$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, -1]$	**1p**
	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [-1, 0]$, deci f este descrescătoare pe $[-1, 0]$	**1p**
	$f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$, deci f este crescătoare pe $[0, +\infty)$	**1p**
2.a)	$\int_1^2 \left(f(x) - 3x^2\right) dx = \int_1^2 4x^3 dx = x^4 \Big\vert_1^2 =$	**3p**
	$= 16 - 1 = 15$	**2p**
b)	$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^4 + x^3 + c$, unde $c \in \mathbb{R}$	**2p**
	$F(1) = 2015 \Rightarrow c = 2013$, deci $F(x) = x^4 + x^3 + 2013$	**3p**
c)	$\int_1^n \dfrac{f(x)}{x^2} dx = \int_1^n (4x+3) dx = 2x^2 \Big\vert_1^n + 3x \Big\vert_1^n = 2n^2 + 3n - 5$	**3p**
	$2n^2 + 3n - 5 = 9$ și cum n este număr natural, $n > 1$, obținem $n = 2$	**2p**