Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\left(2-\frac{1}{2}\right):\frac{3}{10}=5$.
5p	**2.** Calculați $f(-2)+f(2)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x-1}=3$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, acesta să fie multiplu de 5.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0), M(0,4)$ și $N(4,0)$. Arătați că triunghiul MON este isoscel.
5p	**6**. Calculați aria triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $AB=10$ și $AC=12$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătați că $\det A=1$.
5p	**b)** Arătați că $A\cdot A+I_2=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
5p	**c)** Demonstrați că $\det(A-aI_2)\geq 1$, pentru orice număr real a.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3+5X^2+X+5$.
5p	**a)** Arătați că $f(-5)=0$.
5p	**b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+6X+5.
5p	**c)** Demonstrați că $\frac{x_3}{x_1x_2}+\frac{x_2}{x_1x_3}+\frac{x_1}{x_2x_3}=-\frac{23}{5}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2x^2+1$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=4x(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstrați că $0\leq f(x)\leq 1$, pentru orice $x\in[-1,1]$.
	2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\sqrt{x}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\sqrt{x}\right)dx=\frac{26}{3}$.
5p	**b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+2015$ este o primitivă a funcției f.
5p	**c)** Arătați că suprafața delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(f(x)-\sqrt{x}\right)e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$, are aria egală cu $e(2e-1)$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	**3p**
	$\frac{3}{2}\cdot\frac{10}{3}=5$	**2p**
2.	$f(-2)=0$, $f(2)=0$	**2p**
	$f(-2)+f(2)=0$	**3p**
3.	$2x-1=9$	**3p**
	$x=5$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A sunt 2 multipli de 5, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	**2p**
5.	$MO=4$	**2p**
	$ON=4\Rightarrow \Delta MON$ este isoscel	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{10\cdot 12}{2}=$	**3p**
	$=60$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{vmatrix}=3\cdot(-3)-(-2)\cdot 5=$	**3p**
	$=-9+10=1$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	**3p**
	$A\cdot A+I_2=\begin{pmatrix}-1+1 & 0\\ 0 & -1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
c)	$A-aI_2=\begin{pmatrix}3-a & -2\\ 5 & -3-a\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A-aI_2)=\begin{vmatrix}3-a & -2\\ 5 & -3-a\end{vmatrix}=-9+a^2+10=$	**3p**
	$=a^2+1\geq 1$, pentru orice număr real a	**2p**
2.a)	$f(-5)=(-5)^3+5\cdot(-5)^2+(-5)+5=$	**3p**
	$=-125+125-5+5=0$	**2p**
b)	Câtul este $X-1$	**3p**
	Restul este $2X+10$	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=-5$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1$, $x_1x_2x_3=-5$	**3p**
	$\frac{x_3}{x_1x_2}+\frac{x_2}{x_1x_3}+\frac{x_1}{x_2x_3}=\frac{(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)}{x_1x_2x_3}=\frac{(-5)^2-2\cdot 1}{-5}=-\frac{23}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x^3-4x=$	**3p**
	$=4x\left(x^2-1\right)=4x(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(1)=0$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=0$	**3p**
c)	$f'(-1)=f'(0)=f'(1)=0$, $f'(x)\geq 0$, pentru $x\in[-1,0]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru $x\in[0,1]$	**2p**
	$f(-1)=f(1)=0$ și $f(0)=1\Rightarrow 0\leq f(x)\leq 1$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**3p**
2.a)	$\int_1^3\left(f(x)-\sqrt{x}\right)dx=\int_1^3 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_1^3=$	**3p**
	$=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{26}{3}$	**2p**
b)	$F'(x)=\frac{3x^2}{3}+\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=$	**3p**
	$=x^2+\sqrt{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^2 x^2e^xdx=\left.x^2e^x\right\|_1^2-\int_1^2 2xe^xdx=4e^2-e-2\left(\left.xe^x\right\|_1^2-\int_1^2 e^xdx\right)=$	**3p**
	$=4e^2-e-2\left(2e^2-e\right)+\left.2e^x\right\|_1^2=2e^2-e=e(2e-1)$	**2p**