Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADAT (30 pont)

5p **1.** Számítsd ki az $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladvány első három tagjának összegét, ha $a_1 = 3$ és az állandó különbség $r = 2$.

5p **2.** Határozd meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 2$ függvényhez rendelt parabola csúcsának koordinátáit!

5p **3.** Oldd meg a $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = 1$ egyenletet a valós számok halmazán!

5p **4.** Határozd meg az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz háromelemű részhalmazainak számát!

5p **5.** Az xOy koordináta-rendszerben adottak az $A(2,3)$, $B(-2,1)$ és $C(-2,5)$ pontok. Határozd meg az $\overrightarrow{AM}$ vektor hosszát, ahol M a BC szakasz felezőpontja.

5p **6.** Számítsd ki $\operatorname{ctg} a$ értékét, ha $\sin a = \dfrac{1}{3}$ és $a \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

II. FELADAT (30 pont)

1. Adott az $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.

5p **a)** Számítsd ki: $\det(A(3))$.

5p **b)** Igazold, hogy $A(-2015) + A(2015) = 2A(0)$.

5p **c)** Határozd meg az x valós számokat, amelyekre teljesül a $\det(A(x)) = x^2$ egyenlőség!

2. A $\mathbb{Z}_5[X]$ halmazban adott az $f = X^3 + aX$ polinom, ahol $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ és $a \in \mathbb{Z}_5$.

5p **a)** Számítsd ki: $f(\hat{0})$.

5p **b)** Határozd meg az $a \in \mathbb{Z}_5$ számot, ha $f(\hat{3}) = \hat{3}$.

5p **c)** Ha $f(\hat{1}) = f(\hat{2})$ igazold, hogy $f(\hat{3}) = f(\hat{4})$.

III.FELADAT (30 pont)

1. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x + \ln x}{x}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Határozd meg az f függvény grafikus képének $x_0 = 1$ abszcisszájú pontjában, az f függvény grafikus képéhez húzott érintő egyenletét!

5p **c)** Határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait!

2. Adott az $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$ függvény.

5p **a)** Számítsd ki $\displaystyle\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+1}\right)dx$.

5p **b)** Igazold, hogy $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\,dx = \frac{4}{3} - \ln 2$.

5p **c)** Határozd meg a nullától különböző n természetes számot, ha az f függvény grafikus képe, az Ox tengely, valamint az $x = 0$ és $x = 1$ egyenletű egyenesek által határolt terület egyenlő $\dfrac{1}{2} + \ln(n^2 + n)$-el!