Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADAT (30 pont)

5p	**1.** Számítsd ki az $(a_n)_{n\ge1}$ számtani haladvány első három tagjának összegét, ha $a_1=3$ és az állandó különbség $r=2$.
5p	**2.** Határozd meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-2$ függvényhez rendelt parabola csúcsának koordinátáit!
5p	**3.** Oldd meg a $\sqrt{x^2-4x+5}=1$ egyenletet a valós számok halmazán!
5p	**4.** Határozd meg az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz háromelemű részhalmazainak számát!
5p	**5.** Az xOy koordináta-rendszerben adottak az $A(2,3)$, $B(-2,1)$ és $C(-2,5)$ pontok. Határozd meg az $\overrightarrow{AM}$ vektor hosszát, ahol M a BC szakasz felezőpontja.
5p	**6.** Számítsd ki $\operatorname{ctg} a$ értékét, ha $\sin a=\frac{1}{3}$ és $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

II. FELADAT (30 pont)

	1. Adott az $A(x)=\begin{pmatrix}2 & x\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.
5p	**a)** Számítsd ki: $\det(A(3))$.
5p	**b)** Igazold, hogy $A(-2015)+A(2015)=2A(0)$.
5p	**c)** Határozd meg az x valós számokat, amelyekre teljesül a $\det(A(x))=x^2$ egyenlőség!
	2. A $\mathbb{Z}_5[X]$ halmazban adott az $f=X^3+aX$ polinom, ahol $\mathbb{Z}_5=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}\}$ és $a\in\mathbb{Z}_5$.
5p	**a)** Számítsd ki: $f(\hat{0})$.
5p	**b)** Határozd meg az $a\in\mathbb{Z}_5$ számot, ha $f(\hat{3})=\hat{3}$.
5p	**c)** Ha $f(\hat{1})=f(\hat{2})$ igazold, hogy $f(\hat{3})=f(\hat{4})$.

III.FELADAT (30 pont)

	1. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$ függvény.
5p	**a)** Igazold, hogy $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Határozd meg az f függvény grafikus képének $x_0=1$ abszcisszájú pontjában, az f függvény grafikus képéhez húzott érintő egyenletét!
5p	**c)** Határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait!
	2. Adott az $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{1}{x+1}$ függvény.
5p	**a)** Számítsd ki $\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)dx$.
5p	**b)** Igazold, hogy $\int_0^1 xf(x)\,dx=\frac{4}{3}-\ln 2$.
5p	**c)** Határozd meg a nullától különböző n természetes számot, ha az f függvény grafikus képe, az Ox tengely, valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenletű egyenesek által határolt terület egyenlő $\frac{1}{2}+\ln\left(n^2+n\right)$-el!

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1+a_2+a_3=3+(3+2)+(3+2\cdot 2)=$	**3p**
	$=15$	**2p**
2.	$-\frac{b}{2a}=-1$	**2p**
	$-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{12}{4}=-3$	**3p**
3.	$x^2-4x+4=0$	**3p**
	$x=2$ care verifică ecuația	**2p**
4.	Numărul submulțimilor cu 3 elemente ale unei mulțimi cu 5 elemente este egal cu $C_5^3=$	**3p**
	$=10$	**2p**
5.	$M(-2,3)$	**2p**
	$AM=4$	**3p**
6.	$\cos a=\frac{2\sqrt{2}}{3}$	**3p**
	$\operatorname{ctg} a=2\sqrt{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(3))=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 3-1\cdot 3=$	**3p**
	$=3$	**2p**
b)	$A(-2015)=\begin{pmatrix}2 & -2015\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $A(2015)=\begin{pmatrix}2 & 2015\\ 1 & 3\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(-2015)+A(2015)=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2 & 6\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}=2A(0)$	**3p**
c)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}2 & x\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6-x$	**2p**
	$x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x_1=-3$ și $x_2=2$	**3p**
2.a)	$f(\hat{0})=\hat{0}^3+a\cdot\hat{0}=$	**2p**
	$=\hat{0}$	**3p**
b)	$f(\hat{3})=\hat{2}+a\cdot\hat{3}$	**2p**
	$\hat{2}+a\cdot\hat{3}=\hat{3}\Rightarrow a=\hat{2}$	**3p**
c)	$\hat{1}+a=\hat{3}+a\cdot\hat{2}\Rightarrow a=\hat{3}$	**2p**
	$f(\hat{3})=\hat{1}$ și $f(\hat{4})=\hat{1}\Rightarrow f(\hat{3})=f(\hat{4})$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(x+\ln x)'\cdot x-(x+\ln x)\cdot x'}{x^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot x-x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$	**2p**
	$f(1)=1$, $f'(1)=1$, deci ecuaţia tangentei este $y=x$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=e$	**1p**
	$f'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in(0,e]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0,e]$	**2p**
	$f'(x)\leq 0$ pentru orice $x\in[e,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[e,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\int_0^1\left(x+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\int_0^1 x\,dx=$	**3p**
	$=\left.\dfrac{x^2}{2}\right\|_0^1=\dfrac{1}{2}$	**2p**
b)	$\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+\dfrac{x}{x+1}\right)dx=\int_0^1\left(x^2+1-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=$	**2p**
	$=\left.\left(\dfrac{x^3}{3}+x-\ln(x+1)\right)\right\|_0^1=\dfrac{4}{3}-\ln 2$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_0^1\lvert f(x)\rvert\,dx=\int_0^1\left(x+\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\left.\left(\dfrac{x^2}{2}+\ln(x+1)\right)\right\|_0^1=\dfrac{1}{2}+\ln 2$	**3p**
	$\dfrac{1}{2}+\ln 2=\dfrac{1}{2}+\ln\left(n^2+n\right)\Rightarrow n=-2$ nu este număr natural şi $n=1$	**2p**