Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I.FELADAT **(30 pont)**

5p	**1.** Határozd meg az $(a_n)_{n\geq1}$ számtani haladvány második tagját, ha $a_1=1$ és az állandó különbség $r=2$.
5p	**2.** Határozd meg az m valós szám értékét tudva, hogy az $A(m,0)$ pont rajta van az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ függvény grafikus képén!
5p	**3.** Oldd meg a $\log_2\left(x^2+4\right)=\log_2 8$ egyenletet a valós számok halmazán!
5p	**4.** Mennyi annak a valószínűsége, hogy az $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ halmaz tetszőleges eleme osztható legyen 3-mal?
5p	**5.** Határozd meg az a valós számot tudva, hogy az $\vec{u}=(a+1)\vec{i}+4\vec{j}$ és $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ vektorok kollineárisak!
5p	**6**. Igazold, hogy $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ha $\sin x=\frac{1}{2}$ és $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

II.FELADAT **(30 pont)**

	1. Adott az $A(a)=\begin{pmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol a valós szám.
5p	**a)** Igazold, hogy $A(2014)+A(2016)=2A(2015)$.
5p	**b)** Határozd meg az a valós szám értékét úgy, hogy $\det(A(a))=0$.
5p	**c)** Oldd meg a $\det(A(2)+xA(3))=0$ egyenletet a valós számok halmazán!
	2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x*y=-xy-x-y-2$ műveletet.
5p	**a)** Igazold, hogy $(-1)*1=-1$.
5p	**b)** Igazold, hogy $x*y=-(x+1)(y+1)-1$, bármely x és y valós számok esetén!
5p	**c)** Oldd meg az $(x+2)*(2x-3)=5$ egyenletet a valós számok halmazán!

III.FELADAT **(30 pont)**

	1. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-8x^2+16$ függvény.
5p	**a)** Igazold, hogy $f'(x)=4x(x-2)(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x^4}{x^2+1}$ határértéket!
5p	**c)** Határozd meg az f függvény grafikus képéről azon pontok koordinátáit, amelyekben az f függvény grafikus képéhez húzott érintő párhuzamos az Ox tengellyel!
	2. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{x}$ függvény.
5p	**a)** Igazold, hogy $\int_1^2 x f(x)\,dx=\frac{7}{2}$.
5p	**b)** Igazold, hogy az $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x+2\ln x+2015$ függvény az f -nek egy primitívje!
5p	**c)** Igazold, hogy a $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=(f(x)-1)\ln x$ függvény grafikus képe, az Ox tengely, valamint az $x=1$ és $x=e$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területe 1.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2 = a_1 + r = 1 + 2 =$	**3p**
	$= 3$	**2p**
2.	$f(m) = 0 \Leftrightarrow m + 1 = 0$	**3p**
	$m = -1$	**2p**
3.	$x^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4$	**2p**
	$x_1 = -2$ și $x_2 = 2$, care verifică ecuația	**3p**
4.	Mulțimea M are 8 elemente, deci sunt 8 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea M sunt 2 numere divizibile cu 3, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$	**2p**
5.	$\frac{a+1}{1} = \frac{4}{2}$	**3p**
	$a = 1$	**2p**
6.	Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	**2p**
	$\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2014) = \begin{pmatrix} 2014 & 3 \\ 2013 & 2 \end{pmatrix}$, $A(2016) = \begin{pmatrix} 2016 & 3 \\ 2015 & 2 \end{pmatrix}$, $A(2015) = \begin{pmatrix} 2015 & 3 \\ 2014 & 2 \end{pmatrix}$	**3p**
	$A(2014) + A(2016) = \begin{pmatrix} 4030 & 6 \\ 4028 & 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2015 & 3 \\ 2014 & 2 \end{pmatrix} = 2A(2015)$	**2p**
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{vmatrix} = 3 - a$	**3p**
	$3 - a = 0 \Leftrightarrow a = 3$	**2p**
c)	$A(2) + xA(3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3x & 3+3x \\ 1+2x & 2+2x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2) + xA(3)) = x + 1$	**3p**
	$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$	**2p**
2.a)	$(-1) * 1 = -(-1) \cdot 1 - (-1) - 1 - 2 =$	**3p**
	$= 1 + 1 - 1 - 2 = -1$	**2p**
b)	$x * y = -xy - x - y - 1 - 1 =$	**2p**
	$= -x(y+1) - (y+1) - 1 = -(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

c)	$(x+2)*(2x-3)=-(x+3)(2x-2)-1$	**2p**
	$x^2+2x=0 \Leftrightarrow x_1=-2$ și $x_2=0$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x^3-16x=$	**3p**
	$=4x\left(x^2-4\right)=4x(x-2)(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x^4}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-8x^2+16}{x^2+1}=$	**2p**
	$=-8$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x(x-2)(x+2)=0$	**2p**
	Coordonatele punctelor sunt $x_1=-2$, $y_1=0$; $x_2=0$, $y_2=16$ și $x_3=2$, $y_3=0$	**3p**
2.a)	$\int_1^2 x f(x)dx=\int_1^2(x+2)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\right\vert_1^2=$	**3p**
	$=6-\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$	**2p**
b)	$F'(x)=(x+2\ln x+2015)'=1+\frac{2}{x}=$	**3p**
	$=\frac{x+2}{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^e\lvert g(x)\rvert dx=\int_1^e\frac{2}{x}\ln x\,dx=\left.\ln^2 x\right\vert_1^e=$	**3p**
	$=\ln^2 e-\ln^2 1=1$	**2p**