Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADAT (30 pont)

5p **1.** Adott a $z=1+i$ komplex szám. Igazold, hogy $z^2-2i=0$.

5p **2.** Számítsd ki a $(g\circ f)(3)$ értéket, ahol $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$ és $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+2015$.

5p **3.** Oldd meg a valós számok halmazán az $5^{x^2-5x}=5^{3-3x}$ egyenletet!

5p **4.** Határozd meg az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz négyelemű részhalmazainak számát!

5p **5.** Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adott az $A(0,4)$ pont. Határozd meg annak a d egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az A ponton és párhuzamos az $y=2x+7$ egyenletű egyenessel!

5p **6.** Számítsd ki az MNP háromszög területét tudva, hogy $MN=12$, $MP=3$ és $m(\sphericalangle M)=30°$.

II. FELADAT (30 pont)

1. Adott az $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -a\\ -a & 1\end{pmatrix}$ mátrix, ahol a valós szám.

5p **a)** Igazold, hogy $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Határozd meg azokat az a valós számokat, amelyekre $\det(A(a))=0$.

5p **c)** Igazold, hogy $A(a)A(b)=A(a+b)+abI_2$, bármely a és b valós számra, ahol $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Adott az $f=X^3-mX+2$ polinom, ahol m valós szám.

5p **a)** Igazold, hogy $f(0)=2$.

5p **b)** Határozd meg az m valós szám értékét úgy, hogy f polinomnak a $g=X^2+X-2$ polinommal való osztási maradéka 0 legyen!

5p **c)** Igazold, hogy $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-6$, bármely m valós szám esetén, ahol x_1, x_2 és x_3 az f polinom gyökei!

III. FELADAT (30 pont)

1. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-1$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$.

5p **b)** Igazold, hogy az f függvény csökkenő a $(-\infty,0]$ intervallumon!

5p **c)** Igazold, hogy $e^x\ge x+1$, bármely x valós szám esetén!

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+5$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\int_0^1\left(f(x)+2x-5\right)dx=\dfrac{1}{3}$.

5p **b)** Számítsd ki az $\int_0^2\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx$ értéket!

5p **c)** Igazold, hogy $\int_{2014}^{2015}\dfrac{1}{f(x)}dx\le\dfrac{1}{4}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **<u>Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.</u>**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$	**3p**
	$z^2-2i=2i-2i=0$	**2p**
2.	$f(3)=0$	**2p**
	$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(0)=2015$	**3p**
3.	$x^2-5x=3-3x \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$	**3p**
	$x_1=-1$ și $x_2=3$	**2p**
4.	$C_5^4=\dfrac{5!}{4!\cdot 1!}=$	**3p**
	$=5$	**2p**
5.	Panta dreptei d este egală cu 2	**2p**
	Ecuația dreptei d este $y=2x+4$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta MNP}=\dfrac{12\cdot 3\cdot \sin 30^\circ}{2}=\dfrac{6\cdot 3}{2}=$	**3p**
	$=9$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1\cdot 1-0\cdot 0=1$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&-a\\-a&1\end{vmatrix}=1-a^2$	**3p**
	$1-a^2=0 \Leftrightarrow a_1=-1$ și $a_2=1$	**2p**
c)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}1+ab&-b-a\\-a-b&ab+1\end{pmatrix}$, $A(a+b)=\begin{pmatrix}1&-a-b\\-a-b&1\end{pmatrix}$, $abI_2=\begin{pmatrix}ab&0\\0&ab\end{pmatrix}$	**3p**
	$A(a+b)+abI_2=\begin{pmatrix}1+ab&-a-b\\-a-b&1+ab\end{pmatrix}=A(a)A(b)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3-m\cdot 0+2=$	**3p**
	$=0-0+2=2$	**2p**
b)	Restul este $(3-m)X$	**3p**
	$3-m=0 \Leftrightarrow m=3$	**2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=0$	**2p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=m(x_1+x_2+x_3)-6=m\cdot 0-6=-6$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$	**2p**
	$f'(x)=e^x-1$ și $f'(0)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$	**3p**
b)	$e^x\le 1 \Leftrightarrow x\le 0$	**2p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$	**3p**
c)	$f'(0)=0$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci f este crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$	**2p**
	Cum f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$, obținem $f(x)\ge f(0)\Rightarrow e^x\ge x+1$, pentru orice număr real x	**3p**
2.a)	$\int_0^1 (f(x)+2x-5)dx=\int_0^1 (x^2-2x+5+2x-5)dx=\int_0^1 x^2dx=$	**2p**
	$=\left.\dfrac{x^3}{3}\right\|_0^1=\dfrac{1}{3}$	**3p**
b)	$\int_0^2 \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\left.\ln(x^2-2x+5)\right\|_0^2=$	**3p**
	$=\ln 5-\ln 5=0$	**2p**
c)	$f(x)=(x-1)^2+4\ge 4$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\int_{2014}^{2015}\dfrac{1}{f(x)}dx\le\int_{2014}^{2015}\dfrac{1}{4}dx=\left.\dfrac{1}{4}x\right\|_{2014}^{2015}=\dfrac{1}{4}$	**3p**