Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADAT (30 pont)

5p **1.** Számítsd ki az $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladvány állandó különbségét tudva, hogy $a_3 = 6$ és $a_4 = 8$.

5p **2.** Határozd meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 9$ függvény legkisebb értékét!

5p **3.** Oldd meg a valós számok halmazán a $\sqrt{x^2+3} = x+1$ egyenletet!

5p **4.** Határozd meg az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ halmaz kételemű részhalmazainak a számát!

5p **5.** Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adott az $A(2,1)$ és a $B(0,3)$ pont. Határozd meg az AB egyenes egyenletét!

5p **6.** Számítsd ki az ABC háromszög köré írt kör sugarát, ha $AB = 8$ és $C = \frac{\pi}{6}$.

II. FELADAT (30 pont)

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ és $B(x) = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol x valós szám.

5p **a)** Igazold, hogy $\det A = -2$.

5p **b)** Oldd meg a valós számok halmazán a $\det(B(x) + I_2) = 8$ egyenletet, ahol $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Határozd azt az x valós számot, amelyre $A \cdot B(x) = B(x) \cdot A$.

2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = xy - 7x - 7y + 56$ asszociatív műveletet.

5p **a)** Igazold, hogy $(-7) * 7 = 7$.

5p **b)** Igazold, hogy $x * y = (x-7)(y-7) + 7$, bármely x és y valós számok esetén!

5p **c)** Számítsd ki a $1 * 2 * 3 * \cdots * 2015$ kifejezés értékét!

III. FELADAT (30 pont)

1. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x - \ln x + x$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = e$.

5p **b)** Határozd meg az f függvény grafikus képének, az $x = 1$ abszcisszájú pontjában, az f függvény grafikus képéhez húzott érintő egyenletét!

5p **c)** Igazold, hogy f függvény konvex az $(0,+\infty)$ intervallumon.

2. Adott az $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx = \frac{3}{2}$.

5p **b)** Igazold, hogy $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = -\frac{1}{2} + \ln 2$.

5p **c)** Határozd meg annak a forgástestnek a térfogatát, amely a $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ függvény grafikonjának az Ox tengely körüli forgatásakor keletkezik!

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=a_4-a_3=8-6=$	**3p**
	$=2$	**2p**
2.	Valoarea minimă a funcției este $-\frac{\Delta}{4a}=$	**2p**
	$=-\frac{36}{4}=-9$	**3p**
3.	$x^2+3=(x+1)^2 \Leftrightarrow 3=2x+1$	**3p**
	$x=1$, care verifică ecuația	**2p**
4.	$C_7^2=\frac{7!}{2!\cdot 5!}=$	**3p**
	$=21$	**2p**
5.	$\frac{y-1}{3-1}=\frac{x-2}{0-2}$	**3p**
	$y=-x+3$	**2p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=2R \Rightarrow R=\frac{8}{2\cdot\frac{1}{2}}=$	**3p**
	$=8$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 3=$	**3p**
	$=4-6=-2$	**2p**
b)	$B(x)+I_2=\begin{pmatrix}x+1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(B(x)+I_2\right)=7x+1$	**3p**
	$7x+1=8 \Leftrightarrow x=1$	**2p**
c)	$A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}x+6 & 14\\ 3x+12 & 30\end{pmatrix}$	**2p**
	$B(x)\cdot A=\begin{pmatrix}x+6 & 2x+8\\ 21 & 30\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix}x+6 & 14\\ 3x+12 & 30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+6 & 2x+8\\ 21 & 30\end{pmatrix} \Leftrightarrow x=3$	**1p**
2.a)	$(-7)*7=(-7)\cdot 7-7\cdot(-7)-7\cdot 7+56=$	**3p**
	$=-49+49-49+56=7$	**2p**
b)	$x*y=xy-7x-7y+49+7=$	**2p**
	$=x(y-7)-7(y-7)+7=(x-7)(y-7)+7$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

c)	$x*7=7$ și $7*y=7$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$1*2*3*\dots*2015=(1*2*\dots*6)*7*(8*9*\dots*2015)=7*(8*9*\dots*2015)=7$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$	**2p**
	$f'(x)=e^x-\frac{1}{x}+1$ și $f'(1)=e \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=e$	**3p**
b)	$f(1)=e+1$, $f'(1)=e$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=ex+1$	**3p**
c)	$f''(x)=e^x+\frac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx=\int_0^1(x+1)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$	**2p**
b)	$\int_0^1 x^2 f(x)dx=\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}-1+\ln 2=-\frac{1}{2}+\ln 2$	**2p**
c)	$V=\pi\int_0^1 g^2(x)dx=\pi\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx=\pi\cdot\frac{-1}{x+1}\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\pi\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{\pi}{2}$	**2p**