Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADATSOR (30 pont)

5p **1.** Határozd meg az $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladvány harmadik tagját tudva, hogy $a_1 = 2016$ és az állandó különbség $r = 2$.

5p **2.** Határozd meg az m valós számot ha tudva, hogy az $A(1,2)$ pont rajta van az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + m$ függvény grafikus képén.

5p **3.** Oldd meg a valós számok halmazán a $2^{4x-6} = 4^{3x-4}$ egyenletet.

5p **4.** Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy az $A = \{1,2,3,\ldots,40\}$ halmaz egy véletlenszerűen kiválasztott eleme tartalmazza a 4-es számjegyet.

5p **5.** Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(1,\,2)$ és $B(4,5)$ pontok. Határozd meg az AB egyenes egyenletét.

5p **6.** Ha $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ és $\sin x = \frac{4}{5}$, igazold, hogy $\sin 2x = \frac{24}{25}$.

II.FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ mátrix, és az $\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + y - z = -1 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$ egyenletrendszer, ahol a valós szám.

5p **a)** Igazold, hogy $\det(A(0)) = -2$.

5p **b)** Igazold, hogy az $A(a)$ mátrix invertálható bármely a, $a \neq -1$ és $a \neq 1$ valós szám esetén.

5p **c)** Határozd meg azokat az a egész számokat, amelyekre az egyenletrendszernek egyetlen olyan (x_0, y_0, z_0) megoldása van, ahol x_0, y_0 és z_0 egész számok.

2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$ asszociatív műveletet.

5p **a)** Igazold, hogy $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$, bármely x és y valós számok esetén.

5p **b)** Ha tudjuk, hogy $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 3$, igazold, hogy $f(x \circ y) = f(x)f(y)$, bármely x és y valós számok esetén.

5p **c)** Határozd meg azokat az a valós számokat, amelyekre $\underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{2016-\text{szor } a} = 3^{2015} - 1$.

III. FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln\frac{x+1}{x-1}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$, $x \in (1,+\infty)$.

5p **b)** Igazold, hogy az f függvény konvex az $(1,+\infty)$ intervallumon.

5p **c)** Igazold, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f'(2) + f'(3) + f'(4) + \ldots + f'(n)\right) = -\frac{3}{2}$.

2. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\int_1^2 \sqrt{x}\, f(x)\,dx = \frac{5}{2}$.

5p **b)** Igazold, hogy $\int_1^{e^2}\left(f(x)-\sqrt{x}\right)\ln x\,dx=4$.

5p **c)** Határozd meg az a, $a>1$ valós számot tudva, hogy a $g:[1,a]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ függvény grafikus képének az Ox tengely körüli forgatásából kapott test térfogata $\pi\left(\ln a+\frac{7}{2}\right)$.