Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADATSOR (30 pont)

5p **1.** Határozd meg az a valós szám értékét tudva, hogy 24, 1020 és a számok egy számtani haladvány egymásutáni tagjai, ebben a sorrendben.

5p **2.** Határozd meg az m valós számot tudva, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x+m$ függvényhez tartozó parabola érinti az Ox tengelyt!

5p **3.** Oldd meg az $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3}=27$ egyenletet a valós számok halmazán!

5p **4.** Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy az $A=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{25}\right\}$ halmaz egy véletlenszerűen kiválasztott eleme racionális szám legyen!

5p **5.** Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(0,1)$, $B(-2,-1)$ és $C(2,3)$ pontok. Határozd meg az A ponton átmenő, a BC egyenesre merőleges egyenes egyenletét!

5p **6.** Számítsd ki az ABC háromszög köré írt kör sugarának hosszát, ha $m(\sphericalangle A)=45^\circ$ és $BC=2\sqrt{2}$.

II. FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -a\end{pmatrix}$ mátrix, és az $\begin{cases}x+ay+a^2z=0\\ x-y+z=2\\ x+y-az=-4\end{cases}$ egyenletrendszer, ahol a valós szám.

5p **a)** Igazold, hogy $\det\left(A(0)\right)=-1$.

5p **b)** Igazold, hogy az $A(a)$ mátrix invertálható bármely a, $a\neq -1$ és $a\neq\frac{1}{3}$ valós szám esetén!

5p **c)** Határozd meg azokat az a valós számokat, amelyekre az egyenletrendszernek egyetlen olyan (x_0,y_0,z_0) megoldása van, amelyre $x_0=y_0$.

2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x*y=-xy+2x+2y-2$ asszociatív műveletet.

5p **a)** Igazold, hogy $x*y=2-(x-2)(y-2)$, bármely x és y valós számokra!

5p **b)** Határozd meg azokat az x valós számokat, amelyekre $x*x=1$.

5p **c)** Ha m, n és p olyan egész számok, amelyekre $m*n*p=2$, igazold, hogy az m, n és p számok szorzata osztható 2-vel!

III. FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\ln x+1$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $f'(x)=e^x+\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Határozd meg az f függvény grafikus képének $x=1$ abszcisszájú pontjában, az f függvény grafikus képéhez húzott érintő egyenletét!

5p **c)** Igazold, hogy az $f(x)=0$ egyenletnek egyetlen megoldása van a $(0,1)$ intervallumban!

2. Minden n természetes számra értelmezzük az $I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+3}dx$ számot.

5p	**a)** Igazold, hogy $I_0 = 1 + 3\ln\frac{3}{4}$.
5p	**b)** Bizonyítsd be, hogy $I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+2}$, bármely n természetes szám esetén!
5p	**c)** Igazold, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \frac{1}{4}$.