

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADAT

(30 punct)

- 5p 1. Határozd meg az x valós számot, ha a 7, $3x$ és $x^2 + 2$, ebben a sorrendben, egy számtani haladvány egymás utáni tagjai!
- 5p 2. Határozd meg az m valós számot tudva, hogy az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m$ függvényhez rendelt parabola érinti az Ox tengelyt!
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán az $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-9} = 32^x$ egyenletet!
- 5p 4. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy az $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}\}$ halmaz véletlenszerűen kiválasztott részhalmaza legtöbb két elemet tartalmazzon!
- 5p 5. Az xOy koordináta rendszerben adottak az $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ és $C(1, 4)$ pontok. Határozd meg annak a B ponton átmenő egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az ABC háromszög A -ból húzott oldalfelezőjével!
- 5p 6. Számítsd ki az ABC háromszög köré írt kör sugarának hosszát, ha $A = \frac{3\pi}{4}$ és $BC = \sqrt{2}$.

II. FELADAT

(30 pont)

1. Adott az $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $\det(A(10)) = 1024$.
- 5p b) Határozd meg az x valós számokat, ha $A(x) \cdot A(2x) = A(x^2 + 2)$.
- 5p c) Tudva, hogy $A(n) = A(1) \cdot A(2) \cdot A(3) \cdot \dots \cdot A(2016)$ igazold, hogy az n olyan természetes szám, amely osztható 2017-tel!
2. Adott az $f = X^3 - 5X + a$ polinom, ahol a valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $f(0) = a$.
- 5p b) Határozd meg az a valós számot, amelyre $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2016 - 4a$, ahol x_1, x_2 és x_3 az f polinom gyökei.
- 5p c) Igazold, hogy az f polinomnak legfeljebb egy gyöke van az egész számok halmazában!

III. FELADAT

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Számítsd ki $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$.
- 5p c) Igazold, hogy $f(2\sqrt{3}) < f(3\sqrt{2})$.

2. Bărmely nullától különböző n természetes szám esetén tekintsük az $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$ számot.

5p a) Igazold, hogy $I_1 = \frac{2}{3}$.

5p b) Igazold, hogy $I_{n+1} \leq I_n$, bármely nullától különböző n természetes szám esetén!

5p c) Igazold, hogy $(2n+3)I_{n+1} = 2(n+1)I_n$, bármely nullától különböző n természetes szám esetén!