Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADATSOR (30 pont)

5p	**1.** Határozd meg a $(b_n)_{n\geq 1}$ mértani haladvány második tagját tudva azt, hogy $b_1 = 4$ és az állandó hányados $q = 2$.
5p	**2.** Határozd meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$ függvényhez rendelt parabola csúcsának koordinátáit!
5p	**3.** Oldd meg a valós számok halmazán a $\log_3(2x+1) = \log_3 5$ egyenletet.
5p	**4.** Határozd meg a $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ halmaz kételemű részhalmazainak számát.
5p	**5.** Határozd meg az m valós számot tudva azt, hogy az $M(1,0)$ pont rajta van az $y = mx - 2$ egyenletű egyenesen.
5p	**6.** Számítsd ki az ABC háromszög köré írt kör sugarát, ha $AB = \sqrt{2}$ és $C = \frac{\pi}{4}$.

II. FELADATSOR (30 pont)

	1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 1 & 2-a \end{pmatrix}$ mátrix, ahol a valós szám.
5p	**a)** Mutasd ki, hogy $\det(A(2)) = -1$.
5p	**b)** Igazold, hogy $A(a) + A(-a) = 2A(0)$ bármely a valós szám esetén.
5p	**c)** Határozd meg az x valós számot tudva azt, hogy $A(x)A(x) = 2A(1)$.
	2. Adott az $f = X^3 - 4X^2 + mX + 4$ polinom, ahol m valós szám.
5p	**a)** Mutasd ki, hogy $f(-1) + f(1) = 0$ bármely m valós szám esetén.
5p	**b)** Ha $m = -1$ mutasd ki, hogy az f polinom osztható az $X^2 - 1$ polinommal.
5p	**c)** Határozd meg az m valós számot tudva azt, hogy $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 0$, ahol x_1, x_2 és x_3 az f polinom gyökei.

III. FELADATSOR (30 pont)

	1. Adott az $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ függvény.
5p	**a)** Mutasd ki, hogy $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x \in (1,+\infty)$.
5p	**b)** Határozd meg az f függvény grafikus képéhez húzott érintő egyenletét, a grafikus kép $x = 2$ abszcisszájú pontjában.
5p	**c)** Igazold, hogy $f(e) < \frac{7}{2}$.
	2. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ függvény.
5p	**a)** Mutasd ki, hogy $\int_1^2 x^2 f(x)\,dx = e(e-1)$.
5p	**b)** Igazold, hogy az f függvény bármely primitív függvénye konvex a $[2,+\infty)$ intervallumon.
5p	**c)** Igazold, hogy az f függvény grafikus képe, az Ox tengely, valamint az $x = 1$ és $x = 2$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területe kisebb vagy egyenlő, mint $e(e-1)$.