Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADATSOR (30 pont)

5p **1.** Határozd meg az $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladvány harmadik tagját, ha $a_1 = 4$ és $a_2 = 7$.

5p **2.** Az $x^2 - 4x + 1 = 0$ egyenlet megoldásai x_1 és x_2. Igazold, hogy $4x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 0$.

5p **3.** Oldd meg a valós számok halmazán a $2^{2x+1} = \frac{1}{8}$ egyenletet!

5p **4.** Határozd meg annak a valószínűségét, hogy a kétjegyű természetes számok halmazából egy véletlenszerűen kiválasztott szám a 15-nek többszöröse legyen!

5p **5.** Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A(0,1)$, $B(1,1)$ és $C(3,a)$ pontok, ahol a valós szám. Határozd meg az a valós számot ha az A, B és C pontok kollineárisak!

5p **6.** Adott az ABC háromszög, amelyben $AB = 4\sqrt{3}$, $AC = 4$ és $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Számítsd ki a $\sin B$ értékét!

II. FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.

5p **a)** Igazold, hogy $\det(A(1)) = -1$.

5p **b)** Bizonyítsd be, hogy $A(x)A(y) = xyI_2$, bármely x és y valós szám esetén, ahol $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Határozd meg az a valós számot ha $A(3^a)A(3^{a+1})A(3^{a+2}) = A(27)$.

2. Adott az $f = X^3 + mX^2 + 2X - 4$ polinom, ahol m valós szám.

5p **a)** Ha $m = 1$ igazold, hogy $f(1) = 0$.

5p **b)** Igazold, hogy ha az f polinom osztható $X + 2$-vel, akkor f-nek az $X + 3$-mal való osztási maradéka -1.

5p **c)** Határozd meg az m valós számot, ha $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2}$, ahol x_1, x_2 és x_3 az f polinom gyökei!

III. FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x + 2017}{e^x}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $f'(x) = \frac{-(x + 2016)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Határozd meg az f függvény grafikus képének $x = 0$ abszcisszájú pontjában, az f függvény grafikus képéhez húzott érintő egyenletét!

5p **c)** Igazold, hogy az f függvény konvex a $[-2015, +\infty)$ intervallumon!

2. Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = \frac{4}{3}$.

5p **b)** Határozd meg az f függvénynek azt az F primitív függvényét, amelyre $F(1) = \frac{\pi}{4} + 1$.

5p **c)** Határozd meg az n természetes számot ha $\int_0^n x f(x) dx = \frac{1}{2} \ln 5$.