

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică *M_{st-nat}*

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Határozd meg az $(a_n)_{n \geq 1}$ számtani haladvány első tagját, ha $a_3 = 10$ és az állandó különbsége $r = 3$.
- 5p 2. Határozd meg az m valós számot tudva azt, hogy az $A(1,3)$ pont rajta van az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 2m$ függvény grafikus képén!
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $4^x + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ egyenletet!
- 5p 4. Határozd meg, hány olyan kétjegyű, különböző számjegyekből álló páros természetes szám van, amelynek számjegyei az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaz elemei!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(4,2)$ és $B(2,4)$ pontok. Határozd meg az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenletét!
- 5p 6. Határozd meg az $AB = 8$ és $AC = 6$ befogójú, ABC derékszögű háromszög köré írt kör sugarát!

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x+5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $\det(A(-2)) = -4$.
- 5p b) Bizonyítsd be, hogy $A(x) + A(-x) = A(2017) + A(-2017)$, bármely x valós szám esetén!
- 5p c) Határozd meg azon p és q valós számokat, amelyekre $A(0) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.
2. Adott a valós számok halmazán értelmezett $x \circ y = xy + 6x + 6y + 30$ művelet.
- 5p a) Igazold, hogy $x \circ y = (x+6)(y+6) - 6$, bármely x és y valós szám esetén!
- 5p b) Bizonyítsd be, hogy $e = -5$ a „ \circ ” művelet semleges eleme!
- 5p c) Határozd meg azt az x valós számot, amelyre $x \circ (-2017) = 2017 \circ (-6)$.

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{x} + \ln x$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{x-2}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képének $x=1$ abszcisszájú pontjában, az f függvény grafikus képéhez húzott érintő egyenletét!
- 5p c) Igazold, hogy $\frac{2}{x} + \ln x \geq 1 + \ln 2$, bármely $x \in (0, +\infty)$ esetén!
2. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x}$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $\int_1^2 2x f(x) dx = \frac{13}{3}$.
- 5p b) Határozd meg az f függvénynek azt az F primitív függvényét, amelyre $F(1) = 1$.
- 5p c) Bizonyítsd be, hogy $2 \int_1^n (f(x) + x f'(x)) dx = n^2 - 1$, bármely n , $n \geq 2$ természetes szám esetén!