Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADATSOR (30 pont)

5p **1.** Határozd meg a z komplex számot tudva, hogy $2\overline{z}-z=1-3i$, ahol $\overline{z}$ a z konjugáltja!

5p **2.** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+1$ függvény, ahol m valós szám. Határozd meg az m valós számokat tudva, hogy az f függvényhez hozzárendelt parabola csúcsa az Ox tengelyen található!

5p **3.** Oldd meg a valós számok halmazán az $\dfrac{\lg x}{\lg(x+2)}=\dfrac{1}{2}$ egyenletet!

5p **4.** Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott kétjegyű természetes szám számjegyei különbözőek és páratlanok legyenek!

5p **5.** Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adott az $A(-5,2)$ pont és az $y=x+1$ egyenletű d egyenes. Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az A ponton és merőleges a d egyenesre!

5p **6.** Igazold, hogy $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=0$, bármely x valós szám esetén!

II. FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $M(m)=\begin{pmatrix}2m & 1 & 1\\ 1 & 2m & 1\\ 1 & 1 & 2m\end{pmatrix}$ mátrix és a $\begin{cases}2mx+y+z=-1\\ x+2my+z=0\\ x+y+2mz=1\end{cases}$ egyenletrendszer, ahol m valós szám.

5p **a)** Igazold, hogy $\det(M(0))=2$.

5p **b)** Határozd meg az m valós számokat tudva, hogy $\det(M(m))=0$.

5p **c)** Az $m=-1$ esetén, igazold, hogy ha az (a,b,c) az egyenletrendszer megoldása, akkor az a, b és c számok közül legtöbb egy lehet egész.

2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x*y=4xy+3x+3y+\dfrac{3}{2}$ asszociatív műveletet.

5p **a)** Igazold, hogy $x*y=4\left(x+\dfrac{3}{4}\right)\left(y+\dfrac{3}{4}\right)-\dfrac{3}{4}$, bármely x és y valós számok esetén!

5p **b)** Határozd meg azt az x valós számot, amelyre $x*x*x=-\dfrac{1}{2}$.

5p **c)** Határozd meg az a valós számokat tudva, hogy $f(x)*f(y)=f(x+y)$, bármely x és y valós számok esetén, ahol $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ae^x-\dfrac{3}{4}$.

III. FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x^2-\ln x$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $f'(x)=\dfrac{(4x-1)(4x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Igazold, hogy az $A\left(\dfrac{2}{3},3\right)$ pont rajta van az f függvény grafikonjához az f függvény grafikonjának az $x=1$ abszcisszájú pontjában húzott érintőjén!

5p **c)** Igazold, hogy $f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Adott az $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+3}{x+3}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\int_0^1 (x+3)f(x)dx = 4$.

5p **b)** Igazold, hogy $\int_0^1 f(x)dx = 2-3\ln\frac{4}{3}$.

5p **c)** Minden n természetes szám esetén, tekintsük az $I_n=\int_0^1 e^x(x+3)^n\left(f(x)\right)^n dx$ számot. Bizonyítsd be, hogy $I_n+2nI_{n-1}=e\cdot 5^n-3^n$, bármely n, $n\geq 1$ természetes szám esetén!