

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADATSOR

(30 pont)

- 5p 1. Igazold, hogy $\sqrt{3}(2-\sqrt{2})+\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{6})=0$.
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$ függvény. Határozd meg az a valós számokat, ha $f(a) = a$.
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $2^{7x-5} = 4^x$ egyenletet!
- 5p 4. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz egy véletlenszerűen kiválasztott n elemére teljesüljön a $2^n \leq 16$ egyenlőtlenség!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $M(1,2)$, $N(4,3)$ és $P(6,1)$ pontok. Határozd meg az MQ szakasz hosszát, ahol Q az NP szakasz felezőpontja!
- 5p 6. Igazold, hogy $\sin 30^\circ + \sin 45^\circ - \cos 60^\circ - \cos 45^\circ = 0$.

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adottak az $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol x valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $\det(A(2)) = 5$.
- 5p b) Határozd meg az x és y valós számokat, amelyekre $A(x) \cdot A(y) = 3I_2$.
- 5p c) Határozd meg a p egész számot, amelyre $\det(A(p) \cdot A(p) + I_2) = 5$.
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = xy - (x + y) + 2$ asszociatív műveletet.
- 5p a) Igazold, hogy $2 * 2 = 2$.
- 5p b) Bizonyítsd be, hogy $x * y = (x-1)(y-1) + 1$, bármely x és y valós szám esetén!
- 5p c) Számítsd ki $1 * 2 * 3 * \dots * 2018$.

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 2}$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x^2 + 2x + 2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képének $x = -1$ abszcisszájú pontjába, a grafikus képhez húzott érintő egyenletét!
- 5p c) Bizonyítsd be, hogy $1 \leq f(x) + f(y) \leq 3$, bármely x és y valós szám esetén!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 5$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $\int_0^1 (f(x) - x^3) dx = 9$.
- 5p b) Bizonyítsd be, hogy az f függvény bármely primitív függvénye konvex \mathbb{R} -en!
- 5p c) Igazold, hogy $\int_2^4 \frac{3}{f'(x) + 12} dx = \frac{\pi}{8}$.