Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADATSOR (30 pont)

5p	**1.** Igazold, hogy $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-\sqrt{12}=0$.
5p	**2.** Határozd meg azt az a valós számot, amelyre az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+3$ és $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+a$ függvények grafikus képei az $x=1$ abszcisszájú pontban metszik egymást!
5p	**3.** Oldd meg a valós számok halmazán a $\sqrt{x+1}=1-\sqrt{x}$ egyenletet!
5p	**4.** Határozd meg hány olyan különböző számjegyekből álló háromjegyű természetes szám képezhető, amelynek számjegyei a $\{0,1,2,3,4\}$ halmaz elemei!
5p	**5.** Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adott az $y=ax+2$ egyenletű d_1, valamint az $y=\dfrac{x}{4}+1$ egyenletű d_2 egyenes. Határozd meg az a valós számot tudva, hogy a d_1 és d_2 egyenesek párhuzamosak!
5p	**6.** Igazold, hogy $\sin(\pi-x)\cos(2\pi+x)-\sin(2\pi+x)\cos(\pi-x)=\sin 2x$, bármely x valós számra!

II. FELADATSOR (30 pont)

	1. Adottak az $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ és $M(x)=I_2+xA$ mátrixok, ahol x valós szám.
5p	**a)** Igazold, hogy $\det\left(M(1)\right)=0$.
5p	**b)** Igazold, hogy $M(x)-M(2018)=M(-2018)-M(-x)$, bármely x valós szám esetén!
5p	**c)** Határozd meg a nullától különböző természetes számokból álló (m,n) számpárt, amelyre $M(m)M(n)=M(mn)$.
	2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x\circ y=8xy+x+y$ asszociatív műveletet.
5p	**a)** Igazold, hogy $x\circ y=8\left(x+\dfrac{1}{8}\right)\left(y+\dfrac{1}{8}\right)-\dfrac{1}{8}$, bármely x és y valós szám esetén!
5p	**b)** Határozd meg azokat az x valós számokat, amelyekre $x\circ x=1$.
5p	**c)** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x+1$ függvény. Igazold, hogy $f(x\circ y\circ z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, bármely x, y és z valós szám esetén!

III. FELADATSOR (30 pont)

	1. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$ függvény.
5p	**a)** Igazold, hogy $f'(x)=\dfrac{(1-x)(x+3)}{\left(x^2+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Határozd meg az f függvény grafikus képének $x=0$ abszcisszájú pontjában az f függvény grafikus képéhez húzott érintő egyenletét!
5p	**c)** Igazold, hogy $f\left(\sqrt{2}\right)>f\left(\sqrt[3]{3}\right)$.
	2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$ függvény.
5p	**a)** Igazold, hogy $\displaystyle\int_0^3 \frac{x f(x)}{e^x}dx=9$.

5p	**b)** Bizonyítsd be, hogy az f függvény bármely primitívjének egyetlen inflexiós pontja van!
5p	**c)** Határozd meg az n nullától különböző természetes számot, amelyre az f függvény grafikus képe, az Ox tengely valamint az $x=0$ és $x=n$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területe 1.