

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică *M_{st-nat}*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. A $(b_n)_{n \geq 1}$ mértani haladványban $b_1 = 1$ és az állandó hányados $q = 5$. Határozd meg a b_3 tagot!
- 5p 2. Adottak az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 4x - 5$ függvények. Határozd meg a két függvény grafikus képe metszéspontjainak abszcisszáit!
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $\sqrt{2x} + x = 4$ egyenletet!
- 5p 4. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy az $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{49}\}$ halmazból véletlenszerűen kiválasztott szám természetes szám legyen!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(2,3)$, $B(-3,0)$ és $C(-3,6)$ pontok. Határozd meg az ABC háromszög A csúcsán áthaladó oldalfelezőjének egyenletét!
- 5p 6. Igazold, hogy $\sin x(3\sin x - \cos x) + \cos x(\sin x + 3\cos x) = 3$, bármely x valós szám esetén!

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$ mátrix, ahol az a valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $\det(A(-1)) = 17$.
- 5p b) Igazold, hogy $A(2019 - a) + A(2019 + a) = 2A(2019)$, bármely a valós szám esetén!
- 5p c) Határozd meg azokat az x , y valós számpárokat, amelyekre $A(x)A(y) = 2A(-8)$.
2. A $G = (-2, 2)$ halmazon értelmezzük az $x * y = \frac{4x + 4y}{4 + xy}$ műveletet.
- 5p a) Igazold, hogy a 0 a „ $*$ ” művelet semleges eleme!
- 5p b) Határozd meg azt az $x \in G$ számot, amelyre $x * x = \frac{8}{5}$.
- 5p c) Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow G$, $f(x) = \frac{2(x-1)}{x+1}$ függvény. Igazold, hogy $f(xy) = f(x) * f(y)$, bármely $x, y \in (0, +\infty)$ esetén!

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 2x + 2\ln(x+1)$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{-2x}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$.
- 5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képének az $x=0$ abszcisszájú pontjában, az f függvény grafikus képéhez húzott érintő egyenletét!
- 5p c) Igazold, hogy $\ln(1 + \cos x) \leq \cos x$, bármely $x \in (0, \pi)$ esetén!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+3}{e^x}$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $\int_{-1}^1 f(x)e^x dx = 6$.
- 5p b) Igazold, hogy az f függvény minden primitív függvénye növekvő a $[-3, +\infty)$ intervallumon!
- 5p c) Határozd meg azt az n nullától különböző természetes számot, amelyre az f függvény grafikus képe, az Ox tengely, valamint az $x=0$ és $x=n$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területe $4 - 6e^{-n}$.