

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică M_șt-nat

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p** 1. Igazold, hogy $\log_2 7 + \log_2 6 - \log_2 21 = 1$.
- 5p** 2. Adottak az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 1$ függvények. Bizonyítsd be, hogy $f(x) \geq g(x)$, bármely x valós szám esetén!
- 5p** 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $\sqrt{x^2 + 12} = 2x$ egyenletet!
- 5p** 4. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy az $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ halmazból egy véletlenszerűen kiválasztott x szám az $x^2 - 3x + 2 = 0$ egyenlet megoldása legyen!
- 5p** 5. Határozd meg az a és b valós számokat, amelyekre $\vec{u} = 3\vec{v}$, ahol $\vec{u} = a\vec{i} + 6\vec{j}$ és $\vec{v} = 2\vec{i} + b\vec{j}$.
- 5p** 6. Adott az $E(x) = \sin^2 x - \cos^2 x + \sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 2$ kifejezés, ahol x egy valós szám. Bizonyítsd be, hogy $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & x+3 \\ x-3 & x-2 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.
- 5p** a) Igazold, hogy $\det(A(x)) = 5$, bármely x valós szám esetén!
- 5p** b) Határozd meg az n természetes számot, amelyre $A(-3) + A(-2) + A(-1) + A(1) + A(2) + A(3) = nA(0)$.
- 5p** c) Határozd meg az x valós számot úgy, hogy $A(x) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$.
2. A valós számok halmazán értelmezett az $x * y = \frac{x + y + 1}{x^2 + y^2 + 1}$ művelet.
- 5p** a) Igazold, hogy $0 * 1 = 1$.
- 5p** b) Határozd meg az x valós számokat, amelyekre $x * x = 1$.
- 5p** c) Bizonyítsd be, hogy $x * (-x) \leq 1$, bármely x valós szám esetén!

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x^2 + 2x + 2}$ függvény.
- 5p** a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{2x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Számítsd ki $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$.
- 5p** c) Bizonyítsd be, hogy bármely a valós szám esetén, az $f(x) = a$ egyenletnek van legalább egy megoldása!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x + x$ függvény.
- 5p** a) Igazold, hogy $\int_0^1 (f(x) - xe^x) dx = \frac{1}{2}$.
- 5p** b) Igazold, hogy $\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot f(x^2) dx = \frac{e^4 - e + 3}{2}$.

5p c) Tekintsük az f függvény azon $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ primitív függvényét, amelyre $F(1) = 0$. Igazold, hogy

$$\int_0^1 F(x) dx = \frac{5-3e}{3}.$$