Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADATSOR (30 pont)

5p	**1.** Határozd meg az $(a_n)_{n\ge1}$ számtani haladvány első tagját tudva azt, hogy $a_2=3$ és $a_3=5$.
5p	**2.** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$ függvény. Határozd meg az n természetes számot, amelyre $f(n)=3$.
5p	**3.** Oldd meg a valós számok halmazán a $\sqrt{x^2-9}=x-1$ egyenletet!
5p	**4.** Határozd meg az $\{1,2,3,4\}$ halmaz háromelemű részhalmazainak számát!
5p	**5.** Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az $M(1,1)$, $N(3,3)$, $P(4,3)$ és $Q(1,a)$ pontok, ahol a valós szám. Határozd meg az a valós számot, amelyre az $MNPQ$ négyszög egy olyan trapéz, amelynek alapjai MN és PQ.
5p	**6**. Számítsd ki az ABC derékszögű háromszög BC átfogójának hosszát, ha $AB=5$ és $\cos B=\frac{1}{2}$.

II. FELADATSOR (30 pont)

	1. Adott az $A=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$ mátrix, ahol a és b valós számok.
5p	**a)** Igazold, hogy $\det(A\cdot A)=a^2b^2$, bármely a és b valós számok esetén!
5p	**b)** Tekintsük az $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixot, amelyre $A\cdot X=X\cdot A$. Bizonyítsd be, hogy ha a és b különböző valós számok, akkor léteznek az x és t valós számok úgy, hogy $X=\begin{pmatrix} x & 0\\ 0 & t\end{pmatrix}$.
5p	**c)** Ha $a=4$ és $b=0$, határozd meg az $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixokat, amelyekre $Y\cdot Y=A$.
	2. Az $M=[0,+\infty)$ halmazon értelmezett az $x*y=x\sqrt{y+1}+y\sqrt{x+1}$ .művelet.
5p	**a)** Igazold, hogy $3*3=12$.
5p	**b)** Bizonyítsd be, hogy $x*0=0*x=x$, bármely $x\in M$ esetén!
5p	**c)** Határozd meg $x\in M$, amelyre $(x^2+2x)*3=7$.

III. FELADATSOR (30 pont)

	1. Adott az $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+1)$ függvény.
5p	**a)** Igazold, hogy $f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.
5p	**b)** Igazold, hogy az f függvény konvex!
5p	**c)** Tekintsük a $g:(-1,0]\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x+1)^x$ függvényt. Bizonyítsd be, hogy ha $x_1,x_2\in(-1,0]$ úgy, hogy $x_1\le x_2$, akkor $g(x_1)\ge g(x_2)$.
	2. Adott az $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x^3$ függvény.
5p	**a)** Igazold, hogy $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{3}{4}$.
5p	**b)** Igazold, hogy $\int_0^1 x^2\left(f(x)\right)^3dx=\frac{1}{12}$.
5p	**c)** Bizonyítsd be, hogy $\int_0^1\left(f(x)\right)^{n+1}dx\le\int_0^1\left(f(x)\right)^n dx$, bármely n nemnulla természetes szám esetén!