Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

I. FELADATSOR (30 pont)

5p **1.** Számítsa ki az $a = 2021 - \sqrt{2}$ és $b = 2021 + \sqrt{2}$ számok számtani középarányosát!

5p **2.** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$ függvény. Határozza meg az m valós számot tudva azt, hogy az $A(1,m)$ pont eleme az f függvény grafikonjának!

5p **3.** Oldja meg a valós számok halmazán a $\log_3(\sqrt{x}+3) + \log_3(\sqrt{x}-3) = 2$ egyenletet!

5p **4.** Határozza meg annak a halmaznak az elemszámát, amelynek pontosan 16 részhalmaza van!

5p **5.** Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $M(3,0)$, $N(8,3)$ és $P(6,3)$ pontok. Határozza meg a Q pont koordinátáit, tudva azt, hogy $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ}$!

5p **6.** Adott az ABC hegyesszögű háromszög, amelyben $\sin 2A \cdot \cos A = \sin A$. Igazolja, hogy $A = \dfrac{\pi}{4}$.

II. FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1+\log_2 a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol $a \in (0,+\infty)$.

5p **a)** Igazolja, hogy $\det(A(1)) = 1$.

5p **b)** Bizonyítsa be, hogy az $A(a)$ mátrix invertálható bármely $a \in (0,+\infty)$ esetén!

5p **c)** Bizonyítsa be, hogy $\det\left(A(a) + (A(a))^{-1}\right) \geq 8$, bármely $a \in (0,+\infty)$ esetén, ahol $(A(a))^{-1}$ az $A(a)$ mátrix inverze!

2. A valós számok halmazán értelmezett az $x \circ y = xy - m(x+y) + m(m+1)$ művelet, ahol $m \in (0,+\infty)$.

5p **a)** Az $m = 1$ esetén igazolja, hogy $2 \circ 2 = 2$.

5p **b)** Igazolja, hogy ha $2 \circ 1 = 5$, akkor $2 \circ 5 = 1$.

5p **c)** Határozza meg az x valós számot, tudva azt, hogy $(mx^3) \circ (-mx^2) = m$ bármely $m \in (0,+\infty)$ esetén!

III. FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2 - 4\ln x$ függvény.

5p **a)** Igazolja, hogy $f'(x) = \dfrac{4(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x}$, $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Határozza meg az f függvény monotonitási intervallumait!

5p **c)** Igazolja, hogy az $f(x) = 0$ egyenletnek pontosan két különböző valós megoldása van a $(0,+\infty)$ intervallumban!

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\dfrac{2x}{x^4+1}$ függvény.

5p **a)** Igazolja, hogy $\int_0^1 (x^4+1)f(x)\,dx=\dfrac{11}{5}$.

5p **b)** Jelölje $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ az f függvény egy primitív függvényét. Tudva azt, hogy az F függvény grafikus képének ferde aszimptotája van a $+\infty$-ben, határozza meg ennek az aszimptotának az iránytényezőjét!

5p **c)** Tekintsük az f függvénynek azt a $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ primitív függvényét, amelyre $G(0)=0$. Igazolja, hogy $\int_0^1 xG(x)\,dx=\dfrac{1}{3}+\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}\ln 2$.