

Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică  $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Igazolja, hogy  $8 - 6\sqrt{6} + 6(\sqrt{6} - 1) = 2$ .
- 5p 2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x + m$  függvény, ahol  $m$  valós szám. Határozza meg azt az  $m$  valós számot, amelyre  $(f \circ f)(0) = 4$ .
- 5p 3. Oldja meg a valós számok halmazán a  $3 \cdot 2^{2x} + 4^x = 4$  egyenletet!
- 5p 4. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a kétjegyű természetes számok halmazából véletlenszerűen kiválasztott számban a tízesek számjegye a 6 osztója legyen!
- 5p 5. Az  $xOy$  derékszögű koordináta-rendszerben adott az  $y = 3x - 2$  egyenletű  $d$  egyenes és az  $A(a, a)$  pont, ahol  $a$  valós szám. Határozza meg az  $a$  valós számot úgy, hogy az  $A$  pont rajta legyen a  $d$  egyenesen!
- 5p 6. Adott az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög, amelyben  $AB = 10$  és  $\cos A = 0$ . Igazolja, hogy az  $ABC$  háromszög területe 50.

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az  $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x & x^2 \\ 0 & 1 & -2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix, ahol  $x$  valós szám.
- 5p a) Igazolja, hogy  $\det(A(1)) = 1$ .
- 5p b) Igazolja, hogy  $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$ , bármely  $x$  és  $y$  valós szám esetén!
- 5p c) Határozza meg azt az  $n$  természetes számot, amelyre  $A(n) \cdot A(n+1) \cdot A(n+2) \cdot A(n+3) = A(2n^2)$ .
2. Az  $M = [0, +\infty)$  halmazon értelmezett az  $x * y = \frac{2x}{y+2} + \frac{2y}{x+2}$  művelet.
- 5p a) Igazolja, hogy  $1 * 0 = 1$ .
- 5p b) Igazolja, hogy az  $e = 0$  a „ $*$ ” művelet semleges eleme!
- 5p c) Határozza meg az  $x$  nullától különböző,  $x \in M$  számot, amelyre  $x * \frac{4}{x} = x$ .

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2 + \frac{x}{e^x - x}$  függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy  $f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Határozza meg az  $f$  függvény monotonitási intervallumait!
- 5p c) Igazolja, hogy bármely  $m \in (1, 2]$  esetén, az  $f(x) = m$  egyenletnek egyetlen megoldása van!

2. Adott az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3 - x + \sqrt{x^2 + 9}$  függvény.

5p a) Igazolja, hogy  $\int_1^5 (f(x) - \sqrt{x^2 + 9}) dx = 0$ .

5p b) Igazolja, hogy  $\int_0^4 \frac{x}{f(x) + x - 3} dx = 2$ .

5p c) Minden  $n$  nullától különböző természetes szám esetén tekintsük az  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)} dx$  számot. Igazolja, hogy  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .