Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

I. FELADATSOR (30 pont)

5p **1.** Igazolja, hogy $2i(3-i)-6i=2$, ahol $i^2=-1$.

5p **2.** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-mx$ függvény, ahol m valós szám. Határozza meg azt az m valós számot, amelyre $f(-1)=f(1)$.

5p **3.** Oldja meg a valós számok halmazán a $27^{x-1}=9^x$ egyenletet!

5p **4.** Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a kétjegyű természetes számok halmazából véletlenszerűen kiválasztott szám számjegyei kisebbek vagy egyenlőek legyenek, mint 3.

5p **5.** Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(3,2)$ és $B(1,-1)$ pontok. Határozza meg a C pont koordinátáit úgy, hogy $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BC}$.

5p **6.** Adott az $E(x)=\sin 2x-2\operatorname{tg}x\cdot\sin\frac{2x}{3}$ kifejezés, ahol $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Igazolja, hogy $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

II. FELADATSOR (30 pont)

1. Adottak az $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ és $A(x)=\begin{pmatrix}x&1-x&1\\1-x&x&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ mátrixok, ahol x valós szám.

5p **a)** Igazolja, hogy $\det(A(0))=2$.

5p **b)** Igazolja, hogy $A(1)\cdot A(x)-A(x-1)=2I_3$, bármely x valós szám esetén!

5p **c)** Határozza meg azt az x valós számot, amelyre $A(1)\cdot A(1)\cdot A(x)=3A(1)+2I_3$.

2. Az $M=[0,+\infty)$ halmazon értelmezett az $x*y=\frac{xy(x+y)}{xy+1}$ művelet.

5p **a)** Igazolja, hogy $1*3=3$.

5p **b)** Igazolja, hogy $e=1$ a „*” művelet semleges eleme!

5p **c)** Határozza meg azokat az (m,n), $m\le n$, nullától különböző természetes számokból álló számpárokat, amelyekre $\frac{1}{m}*\frac{1}{n}=\frac{1}{16}\cdot(m*n)$.

III.FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2-3x+1}{e^x}$ függvény.

5p **a)** Igazolja, hogy $f'(x)=\frac{(x-1)(4-x)}{e^x},\ x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Igazolja, hogy az Ox tengely az f függvény grafikus képéhez tartozó vízszintes aszimptota a $+\infty$ felé!

5p **c)** Igazolja, hogy az $f(x)=n$ egyenletnek egyetlen megoldása van bármely n nullától különböző természetes szám esetén!

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+4}$ függvény.

5p **a)** Igazolja, hogy $\int_0^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+4}}dx=2$.

5p **b)** Igazolja, hogy $\int_0^{\sqrt{5}} f(x)dx=\frac{19}{3}$.

5p **c)** Bármely n, $n\geq 2$ természetes szám esetén tekintsük az $I_n=\int_1^2 \frac{x^n}{f^2(x)}dx$ számot. Határozza meg azt az n, $n\geq 2$ treméSzetes számot, amelyre $I_{n+2}+4I_n=\frac{3}{n-1}$.