

Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Igazolja, hogy az $a = 20 - \sqrt{21}$ és $b = 22 + \sqrt{21}$ számok számtani közeparányosa 21.
- 5p 2. Adottak az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3 - x$ függvények. Igazolja, hogy $f(a) + g(a) = 2$, bármely a valós szám esetén!
- 5p 3. Oldja meg a valós számok halmazán a $\sqrt{7x-6} = x$ egyenletet!
- 5p 4. Határozza meg, hány olyan kétjegyű, páros természetes szám van amelynek számjegyei az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmazból vannak!
- 5p 5. Az xOy koordináta-rendszerben adottak az $A(6,0)$ és $B(6,6)$ pontok. Igazolja, hogy az AOM háromszög egyenlő szárú, ahol M az OB szakasz felezőpontja!
- 5p 6. Az A -ban derékszögű ABC háromszögben $AC = 4$ és a B szög mértéke 60° . Igazolja, hogy az ABC háromszög A csúcsából húzott magasságának hossza 2.

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adottak az $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ x & x+1 \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol x egy valós szám.
- 5p a) Igazolja, hogy $\det(A(1)) = 3$.
- 5p b) Igazolja, hogy $A(-1) \cdot A(2) - A(-1) = 2I_2$.
- 5p c) Határozza meg azokat az x valós számokat, amelyekre $A(x) \cdot A(-x) + xA(x) = 3I_2$.
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x \circ y = 4(xy+1) - 3(x+y)$ műveletet.
- 5p a) Igazolja, hogy $1 \circ 2 = 3$.
- 5p b) Igazolja, hogy ha $a \circ 3 = 4$, akkor $a \circ (-a) = 0$.
- 5p c) Határozza meg az x valós szám értékeit, amelyekre $(x \circ 1) \circ (x-1) \leq 4$.

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + x + 3 - 5 \ln x$ függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy $f'(x) = \frac{(x-1)(4x+5)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Igazolja, hogy $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 5 \ln x}{3 - x - x^2} = -2$.
- 5p c) Bizonyítsa be, hogy $2x^2 + x \geq 3 + 5 \ln x$, bármely $x \in (0, +\infty)$ esetén!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (3-2x)e^x$ függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x} dx = 2$.
- 5p b) Igazolja, hogy $\int_0^2 f(x) dx = e^2 - 5$.
- 5p c) Határozza meg az $a \in (-\infty, 1)$ számot úgy, hogy $\int_a^1 \frac{e^{3x}}{f^3(x)} dx = \frac{2}{9}$.