Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

I. FELADATSOR (30 pont)

5p **1.** Adottak a $z_1 = 1 + 2i$ és a $z_2 = 1 - i$ komplex számok. Igazolja, hogy $z_1^2 + 4z_2 = 1$.

5p **2.** Adottak az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$ és a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x + m$ függvények, ahol m valós szám. Határozza meg azt az m valós számot, amelyre az f és a g függvény grafikus képének pontosan egy közös pontja van!

5p **3.** Oldja meg a valós számok halmazán a $\lg\left(x^2 + 9\right) = 2\lg\left(x\sqrt{10}\right)$ egyenletet!

5p **4.** Jelölje A azoknak a természetes számoknak a halmazát, amelyeknek legtöbb két számjegye van. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy az A halmazból véletlenszerűen kiválasztott szám osztható legyen 9-cel!

5p **5.** Az ABC háromszögben M az AC oldal felezőpontja, a D és az E pont az AB oldalnak azok a pontjai, amelyekre $AD = BE$. Igazolja, hogy $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{CB}$.

5p **6.** Határozza meg azt az $x \in [0,\pi]$ értéket, amelyre $\sin 2x = 1 + \cos 2x$.

II. FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix és az $\begin{cases} ax + y + 2z = -2 \\ x + ay - z = 4 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$ egyenletrendszer, ahol a valós szám.

5p **a)** Igazolja, hogy $\det\left(A(0)\right) = 1$.

5p **b)** Határozza meg azoknak az a valós számoknak a halmazát, amelyekre az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van!

5p **c)** Az $a = 1$ esetén, határozza meg az egyenletrendszernek azokat az (x_0, y_0, z_0) megoldásait, amelyekre az x_0, y_0 és z_0 egész számok, és $x_0 > y_0 > z_0$.

2. Az $M = [-1,1]$ halmazon értelmezzük az $x * y = \dfrac{xy}{1 + \sqrt{\left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)}}$ műveletet.

5p **a)** Igazolja, hogy $1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

5p **b)** Igazolja, hogy $x * (-x) \geq -x^2$, bármely $x \in M$ esetén!

5p **c)** Határozza meg az M halmazból azokat az (a,b) számpárokat, amelyekre $a * b = 1$.

III. FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 1 - \ln\left(e^x + x^2\right)$ függvény.

5p **a)** Igazolja, hogy $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{e^x + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Határozza meg azokat az a valós számokat, amelyekre az f függvény grafikus képének az $(a, f(a))$ koordinátájú pontjában húzott érintője párhuzamos az Ox tengellyel!

5p **c)** Határozza meg az f függvény képhalmazát.

2. Adott az $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x+3}}$ függvény.

5p **a)** Igazolja, hogy $\int_0^3 f(x)\sqrt{x+3}\,dx=12$.

5p **b)** Igazolja, hogy $\int_{-2}^1 \dfrac{f(x)}{x^2+1}\,dx=2$.

5p **c)** Bizonyítsa be, hogy $\int_0^1 \dfrac{1}{f(x)}\,dx\le\dfrac{\pi}{2}$.