

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{st-nat}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p** 1. Igazolja, hogy $4 - 6\sqrt{3} + 3(2\sqrt{3} - 1) = 1$.
- 5p** 2. Adottak az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 3$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$ függvények. Határozza meg azt az a valós számot, amelyre teljesül az $f(a) = g(a)$ egyenlőség!
- 5p** 3. Oldja meg a valós számok halmazán a $2^{2x+1} \cdot 2^3 = 1$ egyenletet!
- 5p** 4. Határozza meg azt, hogy az $A = \{3, 4, 5, 6\}$ halmaz elemeinek felhasználásával hány darab, különböző számjegyekből álló kétjegyű természetes szám képezhető!
- 5p** 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(4, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 3)$ pontok, valamint az AB szakasz M felezőpontja. Igazolja, hogy az MO és MC szakaszok egyenlő hosszúságúak!
- 5p** 6. Adott az $E(x) = 2 \sin x \sin 2x - \cos x$ kifejezés, ahol x valós szám. Igazolja, hogy $E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adottak az $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $A(a) = \begin{pmatrix} 3+a & 2-2a \\ 1-a & 1+3a \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol a valós szám.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\det(A(0)) = 1$.
- 5p** b) Igazolja, hogy $A(0) \cdot (A(a) - A(0)) = aI_2$, bármely a valós szám esetén!
- 5p** c) Bizonyítsa be, hogy $\det(A(a^2) - aA(a)) \geq 0$, bármely a valós szám esetén!
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x \circ y = x^2 - 4xy + 3y^2$ műveletet.
- 5p** a) Igazolja, hogy $0 \circ 2 = 12$.
- 5p** b) Határozza meg azokat az x valós számokat, amelyekre teljesül a $(2x) \circ x = -1$ egyenlőség!
- 5p** c) Határozza meg azokat az (m, n) , $m < n$, egész számpárokat, amelyekre $m \circ n = 3$.

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 + \frac{4x-4}{x^2}$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $f'(x) = \frac{4(2-x)}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Határozza meg az f függvény grafikus képe vízszintes aszimptotájának egyenletét a $+\infty$ felé!
- 5p** c) Bizonyítsa be, hogy $|f(x) - f(y)| \leq 1$, bármely $x, y \in [1, +\infty)$ esetén!
2. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 4 \ln x$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\int_1^2 (f(x) - 4 \ln x) dx = 7$.
- 5p** b) Igazolja, hogy $\int_1^e x(f(x) - 3x^2) dx = e^2 + 1$.

5p c) Bizonyítsa be, hogy $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)F''(x)dx = \frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$, az f függvény bármely $F:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ primitívje esetén!