

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică  $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Határozza meg az  $(a_n)_{n \geq 1}$  számtani haladvány  $a_3$  tagját, tudva azt, hogy  $a_1 = 2$  és  $a_2 = 12$ .
- 5p 2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - 8$  függvény. Határozza meg azt az  $m$  valós számot, amelyre  $f(1+m) = 1 - m$ .
- 5p 3. Oldja meg a valós számok halmazán a  $\lg(x^2 - 3x + 5) = \lg 5$  egyenletet!
- 5p 4. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a kétjegyű természetes számok halmazából véletlenszerűen kiválasztott  $n$  számra a  $\sqrt{n+1}$  természetes szám legyen!
- 5p 5. Az  $xOy$  derékszögű koordináta-rendszerben adottak az  $A(1,2)$ ,  $B(3,0)$  és  $C(5,a)$  pontok, ahol  $a$  valós szám. Határozza meg az  $a$  értékét, tudva azt, hogy az  $OA$  és  $BC$  egyenesek párhuzamosak!
- 5p 6. Az  $A$ -ban derékszögű  $ABC$  háromszögben  $AC = 9$  és  $B = \frac{\pi}{3}$ . Igazolja, hogy  $AB = 3\sqrt{3}$

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az  $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 0 & x-1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix, ahol  $x$  valós szám.
- 5p a) Igazolja, hogy  $\det(A(2)) = 3$ .
- 5p b) Határozza meg azt az  $x$  valós számot, amelyre  $A(x) \cdot A(1) = 2A(x)$ .
- 5p c) Igazolja, hogy ha az  $A(x)$  mátrix invertálható, akkor az  $A(-x)$  mátrix is invertálható!
2. A valós számok halmazán értelmezzük az  $x \circ y = xy + \frac{2x+2y-1}{4}$  asszociatív műveletet.
- 5p a) Igazolja, hogy  $1 \circ 1 = \frac{7}{4}$ .
- 5p b) Igazolja, hogy az  $e = \frac{1}{2}$  a „ $\circ$ ” művelet semleges eleme!
- 5p c) Határozza meg azokat az  $x$  valós számokat, amelyekre  $\left(\frac{1}{2} - x\right) \circ \left(\frac{1}{2} + x\right) \circ \left(\frac{1}{2} + x^2\right) = \frac{1}{2} - x^2$ .

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{4x^3}{(x-1)^2}$  függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy  $f'(x) = \frac{4x^2(x-3)}{(x-1)^3}$ ,  $x \in (1, +\infty)$ .
- 5p b) Határozza meg az  $f$  függvény grafikus képe ferde aszimptotájának egyenletét a  $+\infty$  felé!
- 5p c) Igazolja, hogy az  $f(x) = m$  egyenletnek pontosan két valós gyöke van bármely  $m \in (27, +\infty)$  esetén!

2. Adott az  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 1 + x \ln x$  függvény.

5p a) Igazolja, hogy  $\int_1^3 (f(x) - x \ln x) dx = 6$ .

5p b) Igazolja, hogy  $\int_1^e (f(x) - x - 1) dx = \frac{e^2 + 1}{4}$ .

5p c) Határozza meg azt az  $a$  nullától különböző valós számot, amelyre a  $g : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $g(x) = \frac{1}{(f(x) - x \ln x)^2}$  függvény grafikus képének az  $Ox$  tengely körüli megfogatásakor keletkezett  
forgástest térfogata  $\frac{7\pi}{24a}$ .