

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Igazolja, hogy  $6 - 2\sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot (2 - \sqrt{5}) = 1$ .
- 5p 2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 3$  függvény. Határozza meg azt az  $a$  valós számot, amelyre  $f(a) + f(1) = 0$ .
- 5p 3. Oldja meg a valós számok halmazán a  $10^{x-1} = 10^{-2x} \cdot 10^2$  egyenletet!
- 5p 4. Határozza meg azt, hogy hány olyan kétjegyű természetes számot lehet képezni az  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  halmazból vett számjegyekkel, amelyeknek számjegyei párosak és különbözőek!
- 5p 5. Az  $xOy$  derékszögű koordináta-rendszerben adottak az  $A(4,6)$  és  $B(6,0)$  pontok. Határozza meg a  $B$  és az  $M$  pont távolságát, ahol az  $M$  pont az  $OA$  szakasz felezőpontja!
- 5p 6. Az  $A$ -ban derékszögű  $ABC$  háromszög területe 24, és  $AC = 6$ . Igazolja, hogy  $AB = 8$ .

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adottak az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  és  $B(x) = \begin{pmatrix} x+1 & x+4 \\ 2x & 4x-3 \end{pmatrix}$  mátrixok, ahol  $x$  valós szám.
- 5p a) Igazolja, hogy  $\det A = 1$ .
- 5p b) Határozza meg azt az  $x$  valós számot, amelyre  $\det(B(x) - xA) = x$ .
- 5p c) Határozza meg azt az  $x$  valós számot, amelyre  $B(x) + B(x+2) = 2A \cdot A \cdot A$ .
2. Adott az  $f = X^3 + mX^2 - 2X - 4$  polinom, ahol  $m$  valós szám.
- 5p a) Ha  $m = 6$ , igazolja, hogy  $f(1) = 1$ .
- 5p b) Határozza meg azt az  $m$  valós számot, amelyre  $(x_1x_2x_3)^2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2x_3$ , ahol  $x_1$ ,  $x_2$  és  $x_3$  az  $f$  polinom gyökei!
- 5p c) Határozza meg az  $f$  polinom gyökeit, tudva azt, hogy az  $f$ -nek az  $X - 2$  polinommal való osztási maradéka 8.

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{3-x}{x^2} + \ln x$  függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy  $f'(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^3}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p b) Igazolja, hogy  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) = 0$ .
- 5p c) Igazolja, hogy  $4f(x) - 1 \geq \ln 16$ , bármely  $x \in (0, +\infty)$  esetén!
2. Adott az  $f: (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x + \frac{1}{\sqrt{x+3}}$  függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy  $\int_2^4 \left( f(x) - \frac{1}{\sqrt{x+3}} \right) dx = 18$ .
- 5p b) Igazolja, hogy  $\int_1^6 (f(x) - 3x) dx = 2$ .
- 5p c) Határozza meg azt az  $a$  valós számot, amelyre  $\int_{-2}^1 \frac{1}{x+3} \left( f(x) - \frac{1}{\sqrt{x+3}} \right) dx = 9(a - 2 \ln 2)$ .