

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică *M<sub>st-nat</sub>*

Varianta 10

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Határozza meg annak az  $(a_n)_{n \geq 1}$  számtani haladványnak az  $a_1$  tagját, amelyben  $a_2 = 8$  és  $a_3 = 12$ .
- 5p 2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x - 2$  függvény. Határozza meg azt az  $m$  valós számot, amelyre  $f(m) = m$ .
- 5p 3. Oldja meg a valós számok halmazán a  $\log_6(9 - x^2) = \log_6 5$  egyenletet!
- 5p 4. Adott az  $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  halmaz. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy az  $A$  halmazból egy véletlenszerűen kiválasztott  $n$  szám esetén a  $\sqrt{2n+1}$  eleme legyen az  $A$  halmaznak!
- 5p 5. Az  $xOy$  derékszögű koordináta-rendszerben adottak az  $A(1,0)$ ,  $B(4,4)$  és  $C(5,2)$  pontok. Igazolja, hogy az  $ABC$  háromszög  $C$ -ben derékszögű!
- 5p 6. Adott az  $E(x) = 2 \sin x \cdot \cos \frac{x}{2} + \left(\sin \frac{3x}{4}\right)^2$  kifejezés. Igazolja, hogy  $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$ .

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adottak az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  és  $B(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ a-3 & 4a-1 \end{pmatrix}$  mátrixok, ahol  $a$  valós szám.
- 5p a) Igazolja, hogy  $\det(B(1)) = 7$ .
- 5p b) Igazolja, hogy  $B(2) - B(0) \cdot B(1) = 4A$ .
- 5p c) Határozza meg azokat az  $a$  valós számokat, amelyekre a  $C(a) = B(a) - aA$  mátrix **nem** invertálható!
2. A valós számok halmazán értelmezzük az  $x * y = xy - 2x - 3y + 6$  műveletet.
- 5p a) Igazolja, hogy  $2 * 2 = 0$ .
- 5p b) Határozza meg azt az  $x$  valós számot, amelyre  $x * 6 = x$ .
- 5p c) Határozza meg azoknak az  $x$  valós számoknak a halmazát, amelyekre  $x * (2 * x) \geq 2$ .

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + x + 4}$  függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy  $f'(x) = \frac{2(4 - x^2)}{(x^2 + x + 4)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Határozza meg az  $f$  függvény grafikus képe vízszintes aszimptotájának egyenletét a  $+\infty$  felé!
- 5p c) Igazolja, hogy  $f(x) - f(4 - x) \leq 1$ , bármely  $x \in [4, +\infty)$  esetén.
2. Adott az  $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$  függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy  $\int_0^2 (x+1) f(x) dx = 8$ .
- 5p b) Igazolja, hogy  $\int_0^1 f(x) dx = 1 + 2 \ln 2$ .
- 5p c) Határozza meg azt az  $a$  valós számot, amelyre  $\int_1^2 (x^2 - 1) e^x f(x) dx = e(e + a)$ .