

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adott az $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ mátrix, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $b \neq 0$.

5p a) Ha az $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix teljesíti az $AX = XA$ egyenlőséget, igazold, hogy létezik $u, v \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $X = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$.

5p b) Igazold, hogy $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén $A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$ alakú, ahol

$$x_n = \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}, \quad y_n = \frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2}.$$

5p c) Oldd meg az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ halmazon az $X^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ egyenletet!

2. Adott az $a \in \mathbb{Z}_7$ és az $f = X^6 + a \cdot X + \hat{5} \in \mathbb{Z}_7[X]$ polinom.

5p a) Igazold, hogy bármely $b \in \mathbb{Z}_7$, $b \neq \hat{0}$ esetén $b^6 = \hat{1}$.

5p b) Igazold, hogy $x^6 + \hat{5} = (x^3 - \hat{4})(x^3 + \hat{4})$, $\forall x \in \mathbb{Z}_7$ esetén!

5p c) Igazold, hogy bármely $a \in \mathbb{Z}_7$ esetén az f polinom reducibilis $\mathbb{Z}_7[X]$ -ben!