

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adott az $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix.

5p a) Igazold, hogy létezik $a \in \mathbb{R}$ úgy, hogy teljesüljön az $A^2 = aA$ egyenlőség!

5p b) Számítsd ki az $(A - A^t)^{2009}$ mátrixot!

5p c) Oldd meg az $X^5 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ egyenletet!

2. Az $M = [0, \infty)$ halmazon értelmezzük az $a * b = \ln(e^a + e^b - 1)$ műveletet, $a, b \in M$.

5p a) Ha $a, b \in M$, igazold, hogy $a * b \in M$.

5p b) Igazold, hogy a „ $*$ ” művelet asszociatív!

5p c) Ha $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, határozd meg $a \in M$ értékét úgy, hogy $\underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ darab } a} = 2a$.