EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adott az $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mátrix.

5p **a)** Igazold, hogy teljesül az $A^2-A=2I_3$ egyenlőség!

5p **b)** Számítsd ki az A^{-1} mátrixot!

5p **c)** Igazold, hogy: $A^{2009}+A^{2008}=2^{2008}(A+I_3)$.

2. Ismertnek tekintjük, hogy a $(\mathbb{Z},*,\circ)$ struktúra kommutatív gyűrű, ahol

$$x*y=x+y-3 \quad \text{és} \quad x\circ y=x\cdot y-3x-3y+12,\ \forall\, x,y\in\mathbb{Z}.$$

5p **a)** Igazold, hogy a „$\circ$” művelet semleges eleme 4.

5p **b)** Határozd meg az $a,b\in\mathbb{Z}$ számokat úgy, hogy az $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=a\cdot x+b$ függvény a $(\mathbb{Z},*,\circ)$ és $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ gyűrűk közötti izomorfizmus legyen!

5p **c)** Oldd meg a $\mathbb{Z}$ halmazon az $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{2009\ darab\ x}=2^{2009}+3$ egyenletet!