

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ és a $B = (0 \ 0 \ 0 \ 1)$ mátrixok valamint az

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 3 \\ y + 2z + 3t = 2 \\ z + 2t = 1 \end{cases} \text{ egyenletrendszer.}$$

5p a) Határozd meg az A mátrix rangját!

5p b) Határozd meg az egyenletrendszer megoldáshalmazát!

5p c) Igazold, hogy az $XA = B$ egyenletnek nincs $X \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$ megoldása!

2. Adott a $G = \left\{ A(k) = \begin{pmatrix} 2^k & 2^k \\ 2^k & 2^k \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ halmaz és minden $t \in \mathbb{Z}$ szám esetén értelmezzük a

$H_t = \left\{ A(kt-1) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ halmazt. Ismertnek tekintjük, hogy a (G, \cdot) struktúra csoport, ahol a „ \cdot ” művelet a mátrixok szorzása.

5p a) Igazold, hogy $\forall n, p \in \mathbb{Z}$ esetén $A(n) \cdot A(p) = A(n+p+1)$.

5p b) Igazold, hogy bármely $t \in \mathbb{Z}$ esetén, H_t részcsoportha a (G, \cdot) csoportnak!

5p c) Igazold, hogy a (G, \cdot) és $(\mathbb{Z}, +)$ izomorf csoportok!